# Über die konforme Abbildung durch Rollkurven begrenzter Gebiete.

---

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Philosophischen Fakultät

der

Philipps-Universität
zu Marburg

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

vorgelegt von

**Johannes Philipps**
aus Charlottenburg.

---

**Marburg 1919.**

Druck von Oscar Brandstetter, Leipzig.

Von der Philosophischen Fakultät der Universität Marburg
als Dissertation angenommen am 4. April 1919.

Berichterstatter: Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Hensel.

# Inhalt.


Seite

Einleitung . . . . . 1
I. Hypozykloidisch begrenzte Gebiete . . . . . 4
II. Epizykloidisch begrenzte Gebiete . . . . . 24
III. Zykloidisch begrenzte Gebiete . . . . . 41
IV. Von Kreisevolventen begrenzte Gebiete . . . . . 53
V. Analytische Spiegelung an den Rollkurven und daraus sich ergebende Unmöglichkeitsbeweise . . . . . 62
Zusammenstellung der Abbildungsfunktionen . . . . . 67

# Einleitung.

Vor einigen Jahren hat Thomae[1]) die konforme Abbildung des Äußeren des Steinerschen Dreispitzes auf das Innere des Einheitskreises behandelt.

Dieser Spezialfall konformer Abbildung eines durch eine Rollkurve begrenzten Gebietes ist nicht der einzige in der mathematischen Literatur.

Im Jahre 1874 erschien eine Arbeit von F. August[2]), in der die konforme Abbildung der Erdoberfläche behandelt wird. Das Ergebnis ist eine Karte, deren äußere Umrandung eine zweispitzige Epizykloide darstellt. Die Pole fallen in die Spitzen.

1879 erschien eine Abhandlung von Amstein[3]), in der er von der Funktion $\zeta = \frac{1}{4}\left(3z + \frac{1}{z^3}\right)$ ausgehend nachweist, daß durch sie der Einheitskreis konform auf das Äußere der durch die Gleichung $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ gegebenen Astroide abgebildet wird.

Im folgenden Jahre veröffentlichte er eine weitere Arbeit[4]), in der er zunächst die Gleichung $\zeta = 2z - z^2$ behandelt, aus der er die konforme Abbildung des Inneren des Einheitskreises auf das Innere der Kardioide herleitet. Ferner gibt er die Funktion $z = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2\sqrt{1-\zeta}}\right)$ an, durch welche die konforme Abbildung des Äußeren der Kardioide auf das Innere des Einheitskreises vermittelt wird. Er setzt die Funktion $\zeta' = \frac{4}{1-\zeta}$ an die Spitze und zeigt, daß durch sie das Äußere der Kardioide auf das Innere der durch die Gleichung $\eta'^2 = 4(1 - \xi')$

---

[1]) Über den Steinerschen Strahlenbüschel und den Dreispitz. (§ 45). Leipzig, B. G. Teubner, 1916.

[2]) Über eine konforme Abbildung der Erde nach der epizykloidischen Projektion. Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin. Band IX. 1874.

[3]) Un exemple de représentation conforme. Bulletin de la société vaudoise des sciences naturelles. Band XV. Lausanne 1879.

[4]) Quelques exemples de représentation conforme avec leur application à un problème d'hydrodynamique. Bulletin de la société vaudoise. Band XVI. Lausanne 1880.

gegebenen Parabel konform abgebildet wird. Durch die von H. A. Schwarz[5]) angegebene Funktion $z = \mathrm{tg}^2\left(\frac{1}{4}\pi\sqrt{\zeta}\right)$ wird dann die konforme Abbildung des Inneren der Parabel auf das Innere des Einheitskreises vermittelt. In der genannten Arbeit werden ferner die Funktionen $\zeta = 1 - z + \ln z$ und $\zeta = 1 - e^w + w$ betrachtet, durch welche die konforme Abbildung von Halbstreifen, die von einem Bogen einer gewöhnlichen Zykloide überdacht sind, auf einen Halbstreifen bzw. auf den Einheitskreis geleistet wird. Der weitere Teil bringt dann eine Anwendung auf ein Problem der Hydrodynamik.

Zwölf Jahre später läßt Amstein[6]) eine neue Abhandlung folgen, in der er wie in seinen früheren Arbeiten verschiedene Funktionen voranstellt und aus ihnen die zugehörigen Abbildungen herleitet. Er stellt sodann die Kurven fest, die den konzentrischen Kreisen um den Nullpunkt entsprechen sowie ihre orthogonalen Trajektorien und kommt zu dem Resultat: „Pour représenter d'une manière conforme l'intérieur du cercle des unités sur l'intérieur d'une épicycloide, on se servira de la fonction $\zeta = nz - pz^n$, où $p = 1$ ou $< 1$, suivant que l'épicycloïde est ordinaire ou allongée*), tandis que pour représenter d'une manière conforme l'extérieur du cercle des unités sur l'extérieur d'une hypocycloïde, on devra employer la fonction $\zeta = nz + \frac{p}{z^n}$, où $p$ est encore $< 1$, lorsqu'il s'agit d'une hypocycloïde allongée*) et égal à 1 dans le cas d'une hypocycloïde ordinaire."

Im gleichen Jahre erschien von G. Huber[7]) eine Arbeit, die einen von ihm 1891 in einer Sitzung der Naturforschenden-Gesellschaft zu Bern gehaltenen Vortrag veröffentlichte, der den Zweck verfolgte, die damals noch wenig bekannte Theorie der Riemannschen Flächen durch ein spezielles Beispiel weiter zu erläutern. Angeregt durch die Amsteinschen Arbeiten behandelt er die konforme Abbildung des Inneren des Einheitskreises auf das Innere einer Epizykloide mit 4 Spitzen und die damit zusammenhängende Riemannsche Fläche. Die Abbildungsfunktion ist $w = 5z - z^5$.

---

[5]) Über einen Grenzübergang durch alternierendes Verfahren. XV. Jahrgang der Vierteljahrsschrift der Naturforscher-Gesellschaft in Zürich.

[6]) Note sur les épicycloides et les hypocycloides envisagées au point de vue de la représentation conforme. Bulletin de la société vaudoise. Band XXVIII. Lausanne 1892.

*) „Allongée" bezeichnet im Französischen die Kurvenarten, die wir im Deutschen mit „verkürzt" zu benennen gewohnt sind.

[7]) Konforme Abbildung des Kreises auf das Innere einer Epizykloide. Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1891. Bern 1892.

Ein umfassender Literaturnachweis über die zyklischen Kurven ist 1901 von E. Wöllfing[8]) veröffentlicht worden.

„Die zyklischen Kurven besitzen mehr als rein geometrisches Interesse. Die gemeine Zykloide tritt z. B. in der Mechanik als Brachistochrone und Isochrone auf, während sie in der Maschinenlehre gemeinschaftlich mit Epizykloide und Evolvente bei den Konstruktionen der Radzähne und Hebedaumen zur Geltung kommt. In neuerer Zeit werden die Radlinien sogar von der Kartographie in Anspruch genommen.“[9])

Die vorliegende Arbeit soll zunächst in systematischer Weise die Abbildung der Gebiete, die von den Rollkurven (gewöhnliche, verkürzte, verlängerte Hypozykloiden, Epizykloiden, Zykloiden und Kreisevolventen) begrenzt werden, nach der von Thomae angewandten funktionentheoretischen Methode der Charakteristik abhandeln und die dabei auftretenden Riemannschen Flächen charakterisieren. Nachdem festgestellt ist, daß sich das Äußere der Hypozykloiden, das Innere der Epizykloiden und andere Gebiete durch rationale Funktionen auf das Innere des Einheitskreises abbilden lassen, drängt sich die Frage auf, ob auch für die entgegengesetzt orientierten Bereiche die Abbildung durch eine rationale Funktion, durch eine rationale Funktion der Exponentialfunktion, durch eine rationale Funktion der unabhängigen Variablen und der Exponentialfunktion oder etwas ähnliches möglich ist. In dieser Hinsicht werden zwei Unmöglichkeitsbeweise gebracht, deren erster zeigt, daß die Abbildungsfunktion überhaupt keine meromorphe Funktion sein kann auch nicht eine solche mit isolierten wesentlich singulären Stellen. Darüber hinausgehend führt der zweite Beweis zu dem Ergebnis, daß die in Frage stehenden Abbildungsfunktionen überhaupt nicht eindeutig sein können. Zu diesen Beweisen waren eingehendere Vorstudien über die Natur der analytischen Spiegelung an den Rollkurven erforderlich, deren Resultate auch an sich von Interesse sind.

---

[8]) Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den zyklischen Kurven. Bibl. Math. 3. Folge. Band II. Leipzig 1901.

[9]) Entnommen aus: G. Holzmüller: Die Haupteigenschaften der zyklischen Kurven in elementarer Darstellung. Bericht über die Kgl. Provinzial-Gewerbeschule zu Hagen von Herbst 1874 bis Herbst 1875.

# I. Hypozykloidisch begrenzte Gebiete.

Die hypozykloidische Bewegung der $\zeta$-Ebene in der festen $z$-Ebene wird durch die folgende Gleichung charakterisiert:

$$z = (n-1)e^{ti} + [\zeta - (n-1)]e^{-(n-1)ti}.$$

Hierin ist der Radius des rollenden Kreises gleich 1 gesetzt, während der des festen Kreises $n$ Einheiten beträgt. Beschränkt man $n$ zunächst auf positive ganze Zahlen, so stellt die Gleichung bei konstantem $\zeta$ Kurven dar, die sich bei einmaliger Umlaufung des festen Kreises schließen. $t$ bedeutet den Wälzungswinkel des festen Kreises, dessen Mittelpunkt zum Nullpunkt der $z$-Ebene gewählt ist. Der Mittelpunkt des rollenden Kreises liegt bei Beginn der Bewegung im Punkte $z = n-1$. Die abrollende Bewegung erfolgt im positiven Sinne um den Nullpunkt herum.

Für $\zeta$ als den die Kurve erzeugenden Punkt setzen wir den Wert $n-1+q$[1]) ein. Für $\zeta = n-1+q_1$ und $\zeta = n-1-q_1$ erhält man dieselben Kurven, die nur gegeneinander um den Nullpunkt durch den Winkel $\frac{\pi}{n}$ gedreht erscheinen, so daß wir uns auf positive Werte von $q$ beschränken können. Wir erhalten die Gleichung

(1) . . . . . $\boldsymbol{z = (n-1)e^{ti} + qe^{-(n-1)ti}\ [q > 0]}$

Für $q = 0$ ist dies die Gleichung des Kreises um 0 durch den Punkt $z = n-1$. Diesen Fall brauchen wir nicht weiter zu berücksichtigen. Für $q = 1$ bekommen wir die gewöhnliche Hypozykloide, die in den $n$ Punkten $z = n\sqrt[n]{1} = ne^{\frac{2\pi}{n}\lambda i}$ $[\lambda = 0, 1, \ldots (n-1)]$ ihre Spitzen hat. Für $q = \vartheta\ [0 < \vartheta < 1]$ ergibt sich eine verkürzte, für $q = p\ [p > 1]$ eine verlängerte Hypozykloide.

Nimmt man $t$ als komplexe Zahl an: $t = \tau + i\sigma$, so ist durch Gleichung (1) eine analytische Funktion gegeben. Wir betrachten die durch sie vermittelten konformen Abbildungen.

Um zunächst die Ausnahmestellen festzulegen, bilden wir den Differentialquotienten

$$\frac{dz}{dt} = (n-1)ie^{ti}(1 - qe^{-nti}),$$

[1]) Für $q = 0$ wird dadurch der Mittelpunkt des rollenden Kreises, für $q = 1$ sein Berührungspunkt mit dem festen Kreise gewonnen.

der die Nullstellen

$$t = -i\frac{\ln q}{n} + \frac{2\pi}{n}\lambda$$

hat. Diesen entsprechen nach Gleichung (1) als Ausnahmestellen der Funktion die Werte

$$z = n\sqrt[n]{q},$$

in denen Winkelverdoppelung stattfindet, da die zweite Ableitung

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -(n-1)e^{ti}[1 + nqe^{-nti}]$$

für die Nullstellen der ersten von Null verschieden ist.

Für alle endlichen $t$ bleibt $\frac{dz}{dt}$ endlich. Läßt man $t$ in Richtung der positiven oder negativen Achse des Imaginären ins Unendliche gehen, so streben $z$ und $\frac{dz}{dt}$ gegen den Wert unendlich hin. Im unendlich fernen Punkt der $z$-Ebene besteht also keine Konformität.

Wir wollen im besonderen hervorheben, daß der Nullpunkt der $z$-Ebene regulär ist. Denn ihm entsprechen nach Gleichung (1) die Werte

$$t = -\frac{i}{n}\ln\frac{q}{n+1} + \frac{\pi}{n}(2\lambda - 1),$$

für welche $\frac{dz}{dt}$ endlich bleibt, sofern $q \neq 0$ ist.

Die den Ausnahmestellen entsprechenden Punkte

$$t = -i\frac{\ln q}{n} + \frac{2\pi}{n}\lambda$$

liegen für $q = 1$ auf der Achse des Reellen, für $q = \vartheta$ (s. o.) oberhalb und für $q = p$ unterhalb dieser, und zwar sind sie in jedem Falle auf den Parallelen zur Achse des Imaginären durch die Punkte $\frac{2\pi}{n}\lambda$ gelegen.

Die Lage der Ausnahmepunkte selbst $z = n\sqrt[n]{q}$ ist zentralsymmetrisch um den Nullpunkt herum auf den Halbstrahlen $S_\lambda$[1]), die vom Nullpunkte ausgehend mit der Achse des Reellen die Winkel $\frac{2\pi}{n}\lambda$ bilden. Für $q = 1$ liegen sie auf dem festen Kreise, für $q = \vartheta$ in seinem Innern und für $q = p$ außerhalb desselben.

Demnach ist ihre Lage bezüglich der Hypozykloiden bei den gewöhnlichen Kurven in ihren Spitzen. Im Hinblick auf die verkürzten Kurven bilden wir

$$f(\vartheta) = (n - 1 + \vartheta) - n\sqrt[n]{\vartheta}.$$

---

[1]) Siehe Figur 1 ff.

Für $\vartheta = 1$ ist $f(\vartheta) = 0$, für $\vartheta = 0$ ist $f(\vartheta) = n - 1$.

$\frac{df(\vartheta)}{d\vartheta} = 1 - \sqrt[n]{\frac{1}{\vartheta^{n-1}}}$ ist für alle zulässigen Werte von $\vartheta$ negativ. Also wächst $f(\vartheta)$ monoton von 0 bis $n-1$, wenn $\vartheta$ von 1 bis 0 abnimmt. D. h. $f(\vartheta)$ ist immer positiv, also liegen die Ausnahmestellen bei allen verkürzten Hypozykloiden im Innern der Kurven, und zwar rücken sie immer näher an den Nullpunkt heran, je kleiner $\vartheta$ ist, je mehr sich also das Aussehen der Kurve dem eines Kreises nähert. Bezüglich der verlängerten Hypozykloiden setzen wir

$$f(p) = (n - 1 + p) - n\sqrt[n]{p}.$$

Für $p = 1$ ist $f(p) = 0$, für $p = \infty$ wird auch $f(p) = \infty$, da $p$ stärker unendlich wird als $\sqrt[n]{p}$. $\frac{df(p)}{dp} = 1 - \sqrt[n]{\frac{1}{p^{n-1}}}$ ist für alle zulässigen Werte von $p$ positiv. Also wächst $f(p)$ monoton von 0 bis $\infty$, wenn $p$ die Werte von 1 bis $\infty$ durchläuft. D. h. $f(p)$ ist immer positiv. Folglich liegen die Ausnahmestellen innerhalb der Schleifen der Kurven und zwar in dem Teile, welcher außerhalb des festen Kreises gelegen ist.

Wir betrachten nun in der $t$-Ebene einen ins Negativ-imaginäre verlaufenden Parallelhalbstreifen mit den beiden Eckpunkten $\frac{2\pi}{n}\lambda$ und $\frac{2\pi}{n}(\lambda + 1)$. Dann entspricht der Strecke zwischen diesen nach Gleichung (1) in der $z$-Ebene der Kurvenbogen, der zwischen den Halbstrahlen $S_\lambda$ und $S_{\lambda+1}$ liegt. Für $t = \frac{2\pi}{n}\lambda + i\sigma\,[0 > \sigma > -\infty]$ wird

$$z = e^{\frac{2\pi}{n}\lambda i}\left[(n-1)e^{-\sigma} + q\,e^{(n-1)\sigma}\right].$$

Hierin ist

$$|z| = r = (n-1)e^{-\sigma} + q\,e^{(n-1)\sigma}$$

und $\operatorname{ampl} z = \frac{2\pi}{n}\lambda$. Die Werte von $z$ beschränken sich also auf den Halbstrahl $S_\lambda$. Für $\sigma = 0$ wird $r = n - 1 + q$, für $\sigma = -\infty$ wird $r = +\infty$. Für alle negativen $\sigma$ aber ist

$$\frac{dr}{d\sigma} = (n-1)e^{-\sigma}\left[q\,e^{n\sigma} - 1\right]$$

negativ, solange $q \leqq 1$ ist. Bezeichnen wir die Kurvenpunkte, die auf den Halbstrahlen $S_\lambda$ liegen und den absoluten Betrag $n - 1 + q$ haben, mit $A_\lambda$, so können wir sagen, daß bei den gewöhnlichen und bei den verkürzten Hypozykloiden den Parallelen zur negativen $\sigma$-Achse durch die Punkte $t = \frac{2\pi}{n}\lambda$ in der $z$-Ebene die unendlichen Halbstrahlen $S_\lambda$ von den Punkten $A_\lambda$ beginnend zugeordnet sind.

Folglich wird der unendliche Sektor, der zwischen $S_\lambda$ und $S_{\lambda-1}$ liegt und am Scheitel von einem Hypozykloidenbogen begrenzt ist, durch die Funktion (1) auf den angegebenen Parallelhalbstreifen von der Breite $\frac{2\pi}{n}$ konform abgebildet; denn im Innern liegen keine für die Abbildung singulären Punkte.

Von diesen Bereichen kann man nun mehrere aneinandersetzen. Führt man dies $n$-mal durch, so erhält man in der $z$-Ebene das ganze Äußere[1]) der gewöhnlichen bezw. verkürzten Hypozykloiden, das jedoch auf einem der Halbstrahlen $S_\lambda$ von $A_\lambda$ aus bis ins Unendliche aufgeschlitzt zu denken ist. Die verschiedenen Ufer des Schlitzes sind dann die Bilder der den Halbstreifen von der Breite $2\pi$ begrenzenden Parallelen.

Wir erhalten also folgende Figuren:[2])

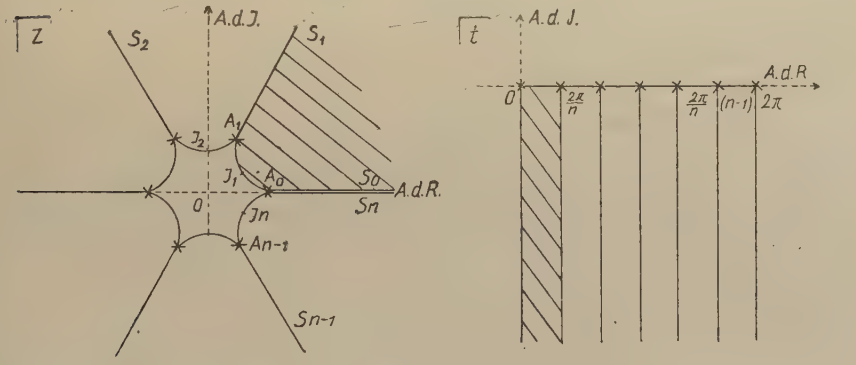



Fig. 1. $z = (n-1)\,e^{ti} + e^{-(n-1)ti}$.

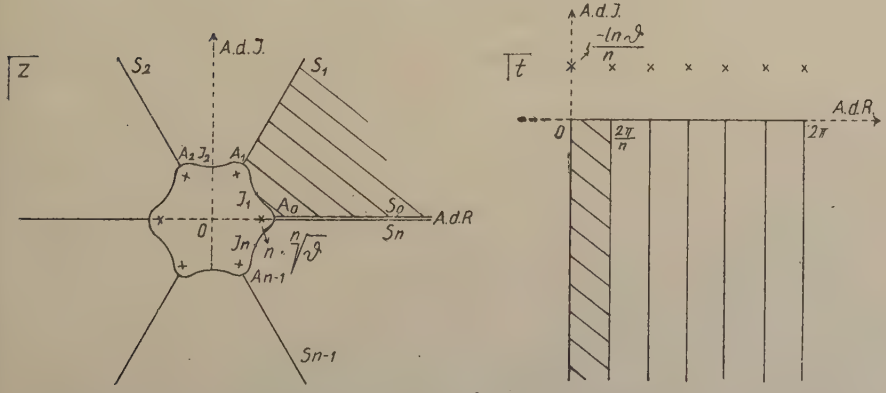



Fig. 2. $z = (n-1)\,e^{ti} + \vartheta\, e^{-(n-1)ti}$.

[1]) Das Innere der Hypozykloiden läßt sich nach diesem Verfahren nicht mit behandeln. (Vgl. hierzu Kapitel V.)

[2]) Die Ausnahmestellen sind durch Kreuze × markiert.

Wir kommen nun zu den verlängerten Hypozykloiden. Setzen wir in der oben für $r$ angegebenen Gleichung $q = p$, so wird

$$r = (n-1)\,e^{-\sigma} + p\,e^{(n-1)\sigma}.$$

Für $\sigma = 0$ ist $r = n - 1 + p$, für $\sigma = \frac{-\ln p}{n}$ ist $r = n\sqrt[n]{p}$ und für $\sigma = -\infty$ wird $r = +\infty$. Nun ist der Differentialquotient

$$\frac{dr}{d\sigma} = (n-1)\,e^{-\sigma}\,(p\,e^{n\sigma} - 1)$$

für $\sigma = \frac{-\ln p}{n}$ gleich Null. Für größere Werte von $\sigma$ ist es positiv, für kleinere negativ. Wenn also $\sigma$ von 0 bis $\frac{-\ln p}{n}$ fällt, nimmt auch $r$ ab und zwar monoton von $n - 1 + p$ bis $n\sqrt[n]{p}$. Fällt $\sigma$ aber weiter von $\frac{-\ln p}{n}$ bis $-\infty$, so wächst $r$ von $n\sqrt[n]{p}$ monoton bis $+\infty$. Wir haben daher in der $z$-Ebene auf den Halbstrahlen $S_\lambda$ und $S_{\lambda+1}$ Schnitte anzubringen und zwar von den Ausnahmestellen bis zu den Punkten $A_\lambda$ und $A_{\lambda+1}$. Der so definierte Bereich der $z$-Ebene wird also durch die Funktion (1) auf einen Halbstreifen von der Breite $\frac{2\pi}{n}$ konform abgebildet.

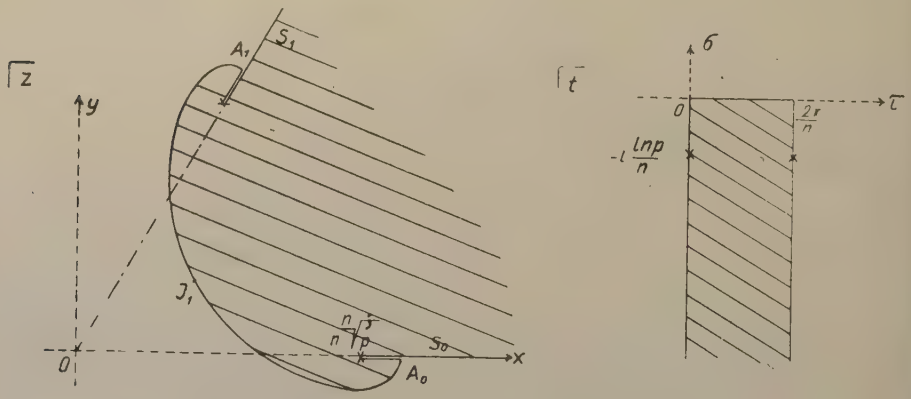



Fig. 3. $z = (n-1)\,e^{ti} + p\,e^{-(n-1)ti}$

Wir können wieder $n$ solcher Bereiche zu einem Gesamtbereiche vereinen, der jetzt aber nicht mehr in der schlichten Ebene liegt, sondern auf einer Riemannschen Fläche, deren Blätter längs der vorgenannten Schnitte paarweise zusammenhängen. Die Ausnahmestellen werden zu Windungspunkten erster Ordnung. Das so verstandene Äußere einer verlängerten Hypozykloide bildet sich also durch die

Funktion (1) konform auf einen ins Negativ-imaginäre verlaufenden Parallelhalbstreifen von der Breite $2\pi$ ab. Auf einem der Halbstrahlen $S_\lambda$ ist von $A_\lambda$ bis zum Windungspunkt und von dort zurück über $A_\lambda$ bis ins Unendliche hin ein Schnitt anzubringen, dessen Ufer den beiden den Halbstreifen begrenzenden Parallelen zugeordnet sind.

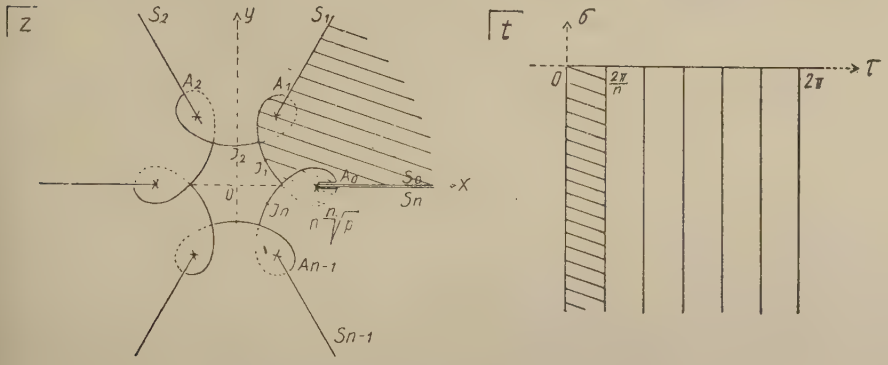



Fig. 4. $z = (n-1)e^{ti} + pe^{-(n-1)ti}$.

Um nun das Äußere der Hypozykloiden auf das Innere des Einheitskreises abzubilden, substituieren wir zunächst $t' = -it$, wodurch eine Drehung des Halbstreifens um den Nullpunkt durch den Winkel $-\frac{\pi}{2}$ erzielt wird. Wenden wir die Exponentialfunktion $w = e^{t'}$ an, so geht der erst gedrehte Halbstreifen in den von $+1$ bis 0 aufgeschlitzten Einheitskreis über. Die Ufer des Schlitzes entsprechen den den Halbstreifen begrenzenden Parallelen. Wir setzen also an

$$w = e^{-it},$$

so daß

$$e^{ti} = \frac{1}{w} \quad \text{und} \quad e^{-(n-1)ti} = w^{n-1}$$

wird. Daher resultiert die Funktion[1])

$$(2) \ldots\ldots\ldots \quad z = \frac{n-1}{w} + qw^{n-1},$$

die wir für sich näher betrachten wollen.

Wir bilden den Differentialquotienten

$$\frac{dz}{dw} = \frac{n-1}{w^2}(qw^n - 1),$$

der die $n$-Nullstellen

$$w = \sqrt[n]{\frac{1}{q}}$$

[1]) Im Gegensatz zu Amstein wollen wir diese Form beibehalten, um dem Werte $n$ den Charakter des Radienverhältnisses zu belassen.

hat. Diesen sind nach Gleichung (2) die Punkte

$$z = n\sqrt[n]{q},$$

d. h. dieselben Ausnahmestellen wie bei der Funktion (1) zugeordnet, in denen Winkelverdoppelung stattfindet, da

$$\frac{d^2z}{dw^2} = \frac{n-1}{w^3}\left[(n-2)\,q\,w^n + 2\right]$$

für $w = \sqrt[n]{\frac{1}{q}}$ von Null verschieden ist. Die Lage der Punkte $w = \sqrt[n]{\frac{1}{q}}$ ist für $q = 1$ auf dem Einheitskreise, für $q = \vartheta$ außerhalb desselben und für $q = p$ in seinem Innern.

Läßt man $\frac{dz}{dw}$ über alle Grenzen wachsen, so strebt $w$ dem Werte Null bzw. unendlich zu. Beiden entspricht in der $z$-Ebene der unendlich ferne Punkt, der also singulär ist.

Im Nullpunkte besteht Konformität, denn für $z = 0$ ergeben sich aus Gleichung (2) die Werte $w = \sqrt[n]{1 - \frac{n}{q}}$, für welche $\frac{dz}{dw}$ endlich und von Null verschieden ist.

Die Schlitze in dem Äußeren der Hypozykloiden waren bei der Abbildung auf die Halbstreifen notwendig, um für die diese begrenzenden Parallelen die Bilder zu erhalten. Lassen wir den Halbstreifen aus der Betrachtung fort und vergleichen die Bereiche der $z$- und der $w$-Ebene direkt miteinander, so ist kein Schlitz mehr erforderlich.

Auf der Peripherie des Einheitskreises ist $|w| = 1$, so daß wir $w = e^{-it}[0 \leq t \leq 2\pi]$ setzen dürfen. Dadurch geht Gleichung (2) sofort in Gleichung (1) über. D. h. aber, daß die Peripherie des Einheitskreises tatsächlich der Kontur der Hypozykloiden zugeordnet ist. Nur der Umlaufssinn ist der entgegengesetzte, was damit übereinstimmt, daß in der $z$-Ebene das Äußere, in der $w$-Ebene das Innere betrachtet wird, so daß die in Frage stehenden Gebiete zur gleichen Seite der Berandung liegen. Also vermittelt die Funktion (2) die konforme Abbildung des Äußeren der Hypozykloiden auf das Innere des gewöhnlichen Einheitskreises.

Für $w = 1$ ist $z = n - 1 + q$, für $w = 0$ wird $z$ unendlich. Die Ableitung $\frac{dz}{dw}$ ist für alle $0 < w < 1$ negativ, solange $q \leq 1$ ist. Für $q = p$ wird $\frac{dz}{dw} = 0$, wenn $w = \sqrt[n]{\frac{1}{p}}$ ist. Ist $w$ größer als dieser Wert, so wird $\frac{dz}{dw}$ positiv, ist $w$ kleiner, wird es negativ. Was wir hier für

den Halbstrahl $\mathcal{S}_0$ gezeigt haben, gilt analog für die anderen Halbstrahlen. Somit leistet die Funktion (2) auch die Einzelabbildungen eines hypozykloidisch abgeschnittenen unendlichen Sektors auf einen Sektor des Einheitskreises von entgegengesetzt gleichem Winkel, wie die folgende Figur zeigt.

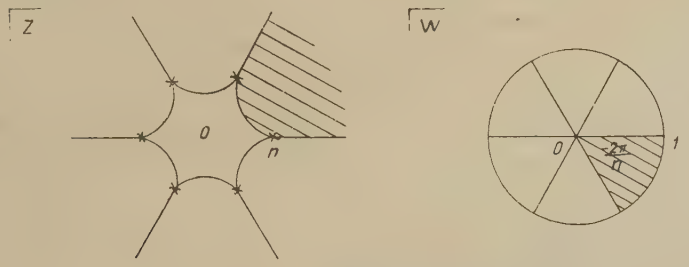



Fig. 5. $z = \frac{n-1}{w} + w^{n-1}$.

Die entsprechenden Abbildungen vermitteln die Funktionen:

$$z = \frac{n-1}{w} + \vartheta w^{n-1}$$

und

$$z = \frac{n-1}{w} + p w^{n-1},$$

wo die Bilder des Einheitskreises in der $z$-Ebene verkürzte bzw. verlängerte Hypozykloiden sind.

Setzt man in Gleichung (2) $n = 3$ und $q = 1$, so wird

$$z = \frac{2}{w} + w^2$$

die Funktion, welche das Äußere des Dreispitzes auf das Innere des Einheitskreises konform abbildet. In der eingangs genannten Abhandlung von Thomae wird für diese Abbildung die Funktion

$$z = k\left\{2e^{i \arccos\left[\frac{i}{2}\left(\frac{1}{w} - w\right)\right]} + e^{-2i \arccos\left[\frac{i}{2}\left(\frac{1}{w} - w\right)\right]}\right\}$$

aufgestellt, worin $k$ den Radius des rollenden Kreises bedeuten soll. Der hierin scheinbar enthaltene Widerspruch — eine bestimmte konforme Abbildung ist stets durch eine und nur eine analytische Funktion möglich — erklärt sich folgendermaßen. Bei Thomae wird der in der $t$-Ebene gefundene Parallelhalbstreifen durch die Substitution $\zeta = \cos t$ auf die zwischen $-1$ und $+1$ aufgeschnittene $\zeta$-Ebene abgebildet und diese ihrerseits dann durch die Substitution $\zeta = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{w} - w\right)$ auf den Einheitskreis zurückgeführt. In der Cosinusfunktion ist aber die Abbildung des Einheitskreises auf die geschlitzte Ebene enthalten. Denn es gilt: $\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right) = \frac{1}{2}\left(t' + \frac{1}{t'}\right)$,

wenn man $t' = e^{it}$ setzt. Daher ist der Weg über die geschlitzte Ebene zur Abbildung auf den Einheitskreis nicht erforderlich.

Wir wollen noch einen weiteren Spezialfall besonders erwähnen. Setzt man in Gleichung (2) $n = 2$ und $q = 1$, nimmt man ferner als Radius des rollenden Kreises den Wert $\frac{1}{2}$ an, so wird

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w} + w\right).$$

Das ist die Funktion, welche die von $-1$ bis $+1$ aufgeschlitzte Ebene auf das Innere des Einheitskreises konform abbildet. Dies Resultat mußte erwartet werden, denn eine zweispitzige Hypozykloide ist ein doppelt durchlaufener Durchmesser des festen Kreises. Ihr Äußeres ist mit der aufgeschlitzten Ebene identisch. Der Radius des festen Kreises wird hier gleich 1, d. h. der Schlitz verläuft tatsächlich von $-1$ bis $+1$.

Der Abbildungscharakter dieser Funktion führt bekanntlich auf eine Schar konfokaler Ellipsen, deren orthogonale Trajektorien die zu den gleichen Brennpunkten gehörenden konfokalen Hyperbeln sind. Auch dies stimmt mit unseren Resultaten überein. Denn jede Hypozykloide, die nur aus zwei Bogen besteht, ist eine Ellipse. Dies läßt sich aus Gleichung (1) verifizieren. Setzt man $n = 2$, so wird $z = e^{ti} + qe^{-ti}$. Da $e^{ti} = \cos t + i \sin t$ und $e^{-ti} = \cos t - i \sin t$ ist, so wird bei Trennung der reellen und imaginären Bestandteile

$$\left.\begin{aligned} x &= (1+q)\cos t \\ y &= (1-q)\sin t \end{aligned}\right\}.$$

Das ist eine Parameterdarstellung einer Ellipse, deren halbe Achsen die Werte $a = 1 + q$ und $b = 1 - q$ besitzen. Die Exzentrizität hat den Wert $e = 2\sqrt{q}$. D. h. die Brennpunkte der Ellipsen fallen in die Ausnahmestellen der Funktion, welche in den Punkten $z = n\sqrt[n]{q}$ gelegen waren.[1])

Für $q = 1$ resultiert der doppelt durchlaufene Durchmesser des festen Kreises: $a = 2$, $b = 0$, $e = 2$. Für $q = 0$ entsteht der Einheitskreis: $a = 1$, $b = 1$, $e = 0$. Für $q = \vartheta$ $(0 < \vartheta < 1)$ erhält man eine verkürzte Hypozykloide: $2 > a > 1$, $0 < b < 1$, $e < 2$. Für $q = p$ $(p > 1)$ entsteht eine verlängerte Hypozykloide: $a > 2$, $b < 0$, $e > 2$.

Man kann jede beliebige Ellipse sowohl als eine verkürzte als auch als eine verlängerte Hypozykloide ansprechen. Im ersten Fall

---

[1]) Hieraus läßt sich die Berechtigung entnehmen, auch bei den allgemeinen Hypozykloiden die Punkte $z = n\sqrt[n]{q}$ als Brennpunkte der Kurven zu bezeichnen.

ist der Umlaufssinn positiv, im zweiten negativ. Bei der Darstellung des Abbildungscharakters (s. unten) decken sich je zwei dieser Ellipsen, die verschiedenen Kreisen in der $w$-Ebene entsprechen. Sie liegen in den verschiedenen Blättern der zugehörigen Riemannschen Fläche.

Substituiert man in Gleichung (2) $w' = \frac{1}{w}$, so wird

$$(3) \quad z = (n-1)\,w' + q\,\frac{1}{w'^{(n-1)}}$$

die Funktion, die das Äußere der Hypozykloiden auf das Äußere des Einheitskreises konform abbildet. Der Differentialquotient

$$\frac{dz}{dw'} = (n-1)\left(1 - \frac{q}{w'^n}\right)$$

hat die Nullstellen $w' = \sqrt[n]{q}$. Der Umlaufssinn ist jetzt in beiden Ebenen der gleiche. Im übrigen bleibt alles wie bisher.

Um den in der Fig. 5 markierten Sektor auf den vollen Einheitskreis zurückzuführen, setzen wir $W = w^n$, also $w = \sqrt[n]{W}$. Daher wird

$$(4) \quad z = \sqrt[n]{\frac{1}{W}}\,(n-1+q\,W).$$

Der Einheitskreis ist hier jedoch wieder von 1 bis 0 aufgeschlitzt zu denken. Das untere Ufer entspricht dem Halbstrahl $S_0$ von $A_0$ aus, das obere dem Halbstrahl $S_1$ von $A_1$ aus. Die Nullstelle des Differentialquotienten ist $W = \frac{1}{q}$, für die $z$ wieder gleich $n\sqrt[n]{q}$ wird. Im übrigen gelten alle bisherigen Schlüsse. Es entsprechen sich also folgende Gebiete:

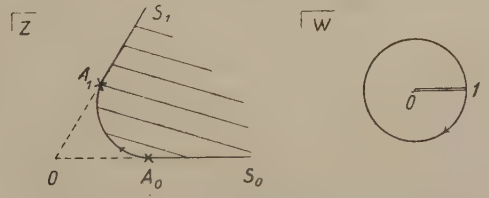



Fig. 6. $z = \sqrt[n]{\frac{1}{W}}\,(n-1+W)$.

Gehört der Kurvenbogen einer verkürzten bzw. verlängerten Hypozykloide an, so lauten die Abbildungsfunktionen

$$z = \sqrt[n]{\frac{1}{W}}\,(n-1+\vartheta\,W)$$

bzw.

$$z = \sqrt[n]{\frac{1}{W}}\,(n-1+p\,W).$$

Zu weiteren Resultaten werden wir geführt, wenn wir den Abbildungscharakter der Funktionen (1) bis (4) näher untersuchen.

Den Parallelen zur negativen Achse des Imaginären der $t$-Ebene durch die Punkte $t = \frac{\pi}{n}(2\lambda - 1)$ entsprechen in der $z$-Ebene die Halbstrahlen, die von den Punkten $J_\lambda$ (s. Fig. 1 ff.) der Kurve aus in der Richtung $\frac{\pi}{n}(2\lambda - 1)$ ins Unendliche gehen. Um dies zu beweisen, setzen wir in Gleichung (1)

$$t = \frac{\pi}{n}(2\lambda - 1) + i\sigma$$

ein, wo $0 > \sigma > -\infty$ ist, und erhalten

$$z = e^{\frac{\pi}{n}(2\lambda-1)i} \cdot \left[(n-1)e^{-\sigma} - qe^{(n-1)\sigma}\right].$$

Hierin ist

$$\text{ampl } z = \frac{\pi}{n}(2\lambda - 1)$$

und

$$|z| = r = (n-1)e^{-\sigma} - qe^{(n-1)\sigma}.$$

Für $\sigma = 0$ ist $r = n - 1 - q$, d. i. der absolute Betrag der mit $J_\lambda$ bezeichneten Punkte. Für $\sigma = -\infty$ wird $r = +\infty$. Die Ableitung $\frac{dr}{d\sigma} = -(n-1)e^{-\sigma}\left[1 + qe^{n\sigma}\right]$ ist für alle $\sigma$ negativ. Also wächst $r$ monoton von $n - 1 - q$ bis $+\infty$, wenn $\sigma$ von 0 bis $-\infty$ fällt. Damit ist die Behauptung erwiesen.

Den genannten Parallelen durch die Punkte $t = \frac{\pi}{n}(2\lambda - 1)$ entsprechen in der $w$-Ebene die Radien des Einheitskreises, die mit der Achse des Reellen die Winkel $-\frac{\pi}{n}(2\lambda - 1)$ bilden.

Ferner setzen wir $t = \tau + i\sigma$ und betrachten $\tau$ als variabel von 0 bis $2\pi$, während wir $\sigma$ als konstant ansehen. Dann wird aus Gleichung (1)

$$z = e^{-\sigma}\left\{(n-1)e^{\tau i} + (q \cdot e^{n\sigma})e^{-(n-1)\tau i}\right\}.$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer stellt eine Hypozykloide dar. Der für ihre Gestalt typische Faktor $q \cdot e^{n\sigma}$ kann entsprechend den verschiedenen Werten von $q$ und $\sigma$ jeden positiven Wert annehmen. Der Streckungsfaktor $e^{-\sigma}$ ist für alle negativen $\sigma$ größer als 1. Für $\sigma = \frac{-\ln q}{n}$ wird der typische Faktor gleich 1 und $e^{-\sigma} = \sqrt[n]{q}$, so daß die Spitzen der hierbei erhaltenen gewöhnlichen

Hypozykloide in die Punkte $n\sqrt[n]{q}$ fallen, welche die Ausnahmestellen der zugrunde gelegten Gleichung sind. Für $\sigma > \frac{-\ln q}{n}$ ist der Faktor $q\,e^{n\sigma}$ größer als 1, für $\sigma < \frac{-\ln q}{n}$ ist er kleiner als 1. Die bezüglichen Ausnahmestellen der sich hieraus ergebenden verlängerten bezw. verkürzten Hypozykloiden hätten an und für sich die Werte $n\sqrt[n]{q\,e^{n\sigma}}$. Zufolge des Streckungsfaktors werden sie hier gleich $n\sqrt[n]{q\,e^{n\sigma}}\cdot e^{-\sigma} = n\sqrt[n]{q}$. D. h. für alle hier auftretenden Hypozykloiden sind die Ausnahmestellen diejenigen, die zu der zugrunde gelegten Funktion gehören. Ist $\sigma$ negativ sehr groß, so wird der typische Faktor sehr klein, man erhält dann eine verkürzte Hypozykloide, deren Aussehen dem eines Kreises sehr nahekommt. Der Streckungsfaktor ist hierbei entsprechend groß.

In der $w$-Ebene entsprechen den betrachteten Parallelen zur Achse des Reellen der $t$-Ebene konzentrische Kreise um den Nullpunkt, die um so kleiner sind, je kleiner $\sigma$ angenommen wird.

Nehmen wir Gleichung (3) mit hinzu, so erhalten wir in der $w'$-Ebene als Bilder der Kurven konzentrische Kreise um den Nullpunkt, die außerhalb des Einheitskreises liegen, und als Bilder der oben angegebenen unendlichen Halbstrahlen ebensolche in kongruenter Lage, die am Einheitskreise beginnen.

Es handelt sich nun nur noch darum, die zu den Hypozykloiden orthogonalen Trajektorien anzugeben, soweit diese nicht gradlinig sind. Dazu setzen wir in Gleichung (2) $w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Dann wird $\frac{1}{w} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ und

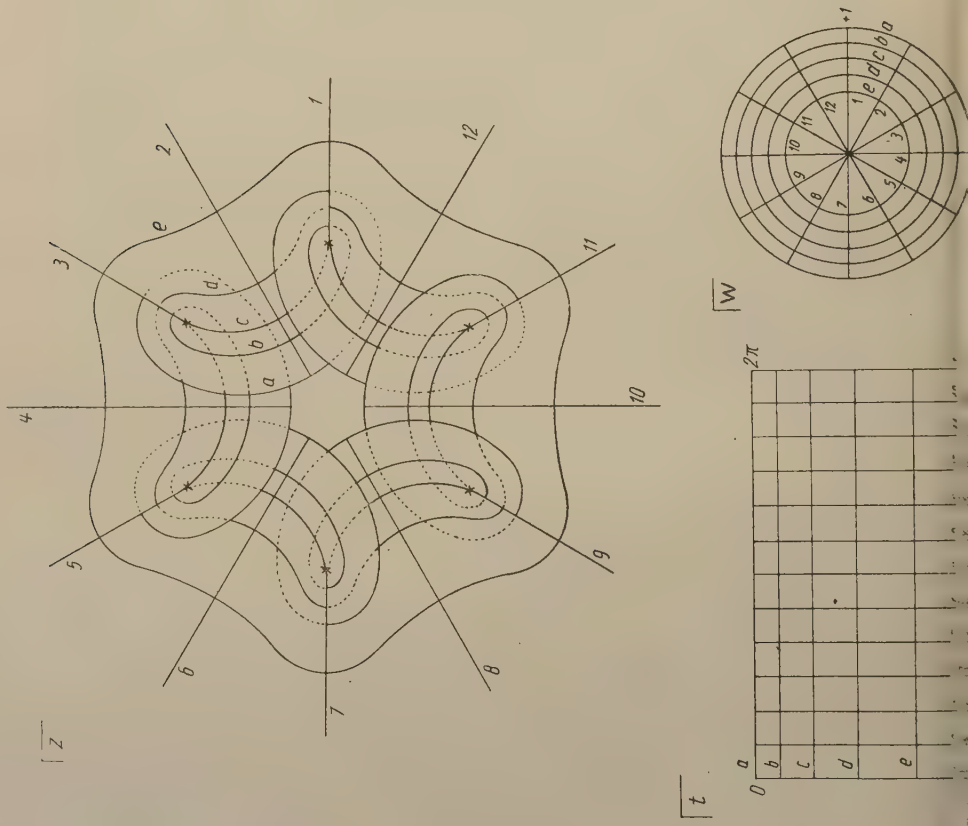
$$w^{n-1} = r^{n-1}[\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi].$$

Setzt man diese Werte in (2) ein und trennt die reellen und imaginären Bestandteile, so wird

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{n-1}{r}\cos\varphi + q\,r^{n-1}\cos(n-1)\varphi \\ y &= -\frac{n-1}{r}\sin\varphi + q\,r^{n-1}\sin(n-1)\varphi \end{aligned}\right\}.$$

Dieses Gleichungspaar repräsentiert bei konstantem $r$ und variabelem $\varphi$ eine Hypozykloide. Betrachtet man aber $\varphi$ als konstant und $r$ als variabel, so ist durch diese Gleichungen eine Parameterdarstellung der zu den Hypozykloiden orthogonalen Trajektorien gegeben. Es sind also algebraische Kurven, da eine rationale Parameterdarstellung vorliegt.

Demnach stellt sich der Abbildungscharakter der Funktionen (1) bis (3) folgendermaßen[1]) dar:




[1]) Die nicht gradlinigen orthogonalen Trajektorien sind in der Figur fortgelassen. Die Fig. 7 erstreckt sich über S. 16 und 17 und ist seitlich zu betrachten.

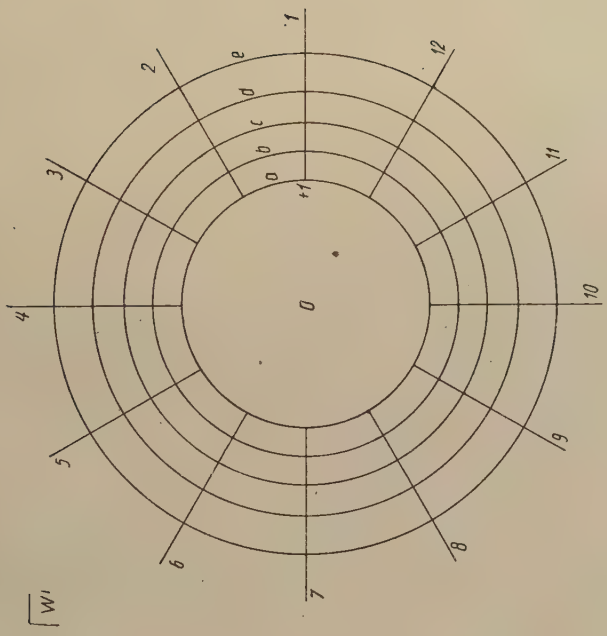



Fig. 7.

$$z = (n-1)\,e^{\varphi i} + q\,e^{-(n-1)\varphi i};\quad z = \frac{n-1}{w} + q\,w^{n-1};\quad z = (n-1)\,w' + q\,\frac{1}{w'^{n-1}}.$$

Der Abbildungscharakter der Funktion (4) ist hieraus mit ersichtlich In der $W$-Ebene erhält man volle Kreise als Bilder der einzelnen Kurvenbogen.

Es ergibt sich eine große Anzahl von Einzelabbildungen, deren hauptsächlichste Vertreter wir durch Figuren andeuten wollen:

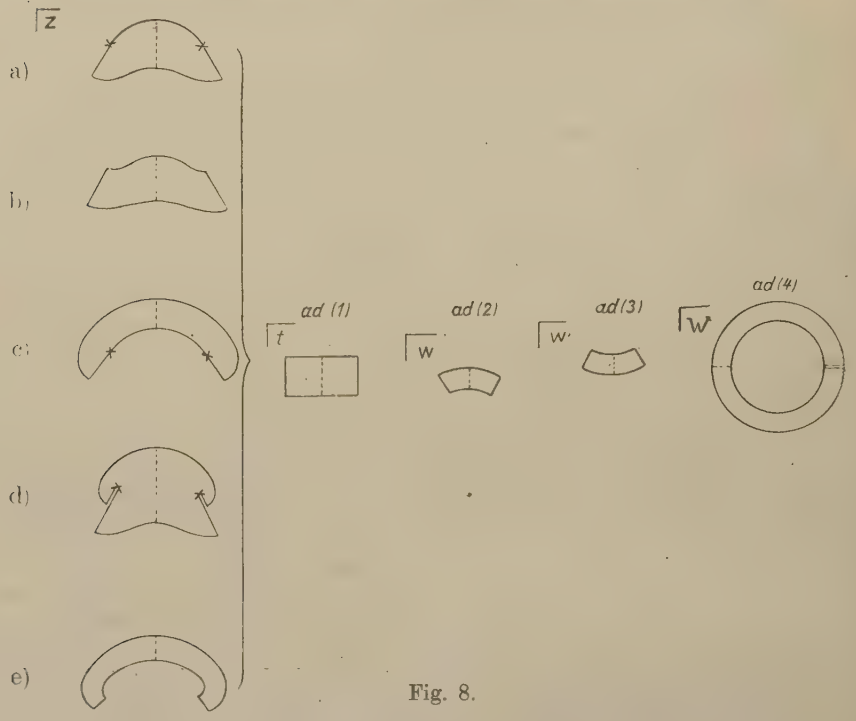
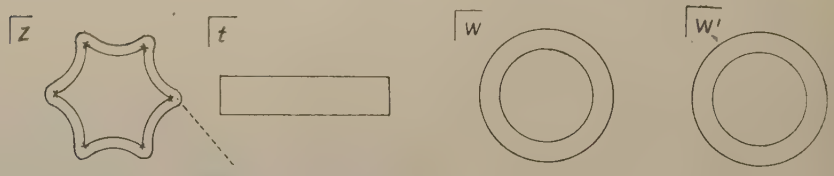



Fig. 8.




(Hier ist bei der Abbildung
auf das Rechteck ein Schnitt erforderlich.)

Fig. 9.

Weitere hypozykloidische Ringe ergeben sich entsprechend den Figuren 8 b) bis e).

Bei der Darstellung des Abbildungscharakters können wir jede beliebige Hypozykloide als Ausgangskurve ansehen, deren Bilder in der $t$-, $w$- und $w'$-Ebene dann als Achse des Reellen bzw. als Einheitskreis anzusprechen sind. Legt man z. B. die gewöhnliche Hypozykloide zugrunde, so muß sich aus der Gleichung

$$z = (n-1)\, e^{ti} + e^{-(n-1)ti},$$

falls $t = \tau + i\sigma$ eingesetzt wird, für jedes $\sigma > 0$ eine verlängerte Hypozykloide ergeben. In der Tat wird:

$$z = e^{\sigma}\{(n-1)e^{\tau i} + (e^{n\sigma})\cdot e^{-(n-1)\tau i}\}.$$

Der typische Faktor $e^{n\sigma}$ ist für alle positiven $\sigma$ größer als 1, während der Streckungsfaktor hier kleiner als 1 wird. Damit ist die Behauptung erwiesen. Für alle so entstehenden verlängerten Hypozykloiden bleiben die Windungspunkte dieselben, nämlich die Spitzen der hier zugrunde gelegten gewöhnlichen Hypozykloide.

Läßt man $\sigma$ nun über alle Grenzen wachsen, so umschreibt der einzelne Bogen der zugehörigen verlängerten Hypozykloide ein Gebiet, das im Grenzwert in das Äußere eines unendlichen Sektors übergeht, der von dem Bogen der zugrunde gelegten Hypozykloide abgeschnitten ist. Das so definierte Gebiet wird durch Gleichung (1) auf einen ins Positiv-imaginäre verlaufenden Parallelhalbstreifen von der Breite $\frac{2\pi}{n}$ abgebildet, der durch die Substitution $w'' = e^{nti}$ auf den geschlitzten Einheitskreis gebracht werden kann. Wir erhalten die Gleichung

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots \quad z = \sqrt[n]{w''}\left(n - 1 + q\frac{1}{w''}\right)$$

und die folgenden Abbildungen:

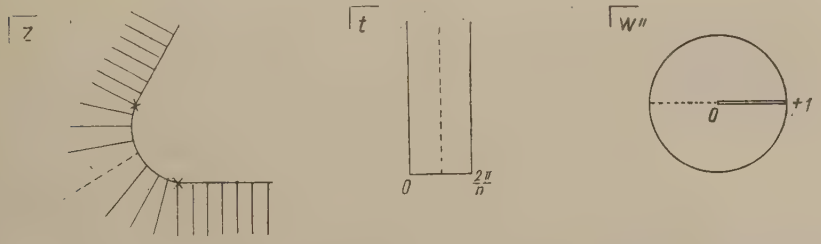



Fig. 10a. $z = (n-1)e^{ti} + e^{-(n-1)ti}$; $z = \sqrt[n]{w''}\left(n - 1 + \frac{1}{w''}\right)$

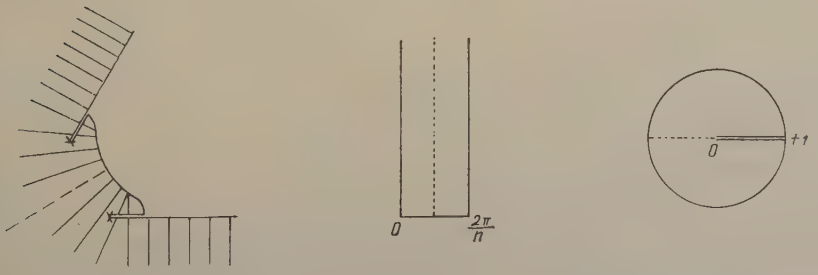



Fig. 10b. $z = (n-1)e^{ti} + \vartheta e^{-(n-1)ti}$; $z = \sqrt[n]{w''}\left(n - 1 + \vartheta\frac{1}{w''}\right)$

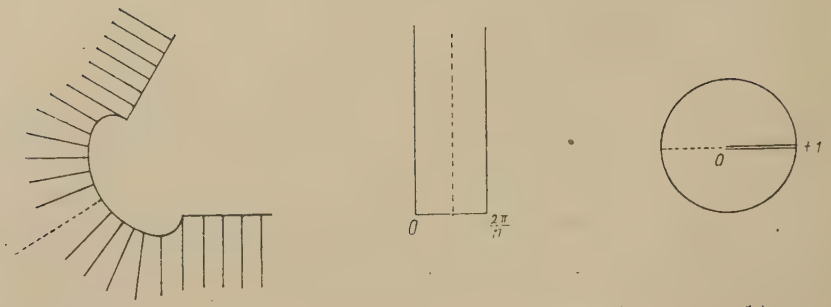



Fig. 10c. $z=(n-1)\,e^{ti}+p\,e^{-(n-1)ti};\ z=\sqrt[n]{w''}\left(n-1+p\,\frac{1}{w''}\right)$.

Hieraus ergeben sich sechs Teilabbildungen. Wir begnügen uns damit, den ersten Typus in seiner Abbildung auf den vollen Einheitskreis zu veranschaulichen. Hierbei ist $w'''=w''^2$ zu substituieren, so daß die allgemeine Funktion lautet:

$$(6)\quad \ldots\ldots\quad z=\sqrt[2n]{\frac{1}{w'''}}\left(n-1+q\,\frac{1}{\sqrt{w'''}}\right).$$

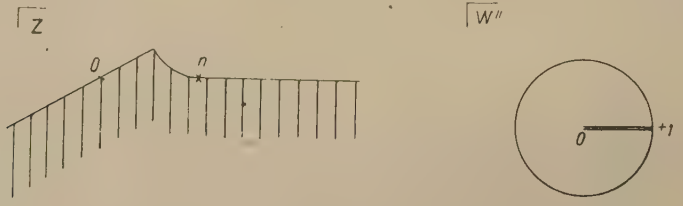



Fig. 11. $z=\sqrt[2n]{\frac{1}{w'''}}\left(n-1+\frac{1}{\sqrt{w'''}}\right)$.

Die übrigen Abbildungen werden analog.

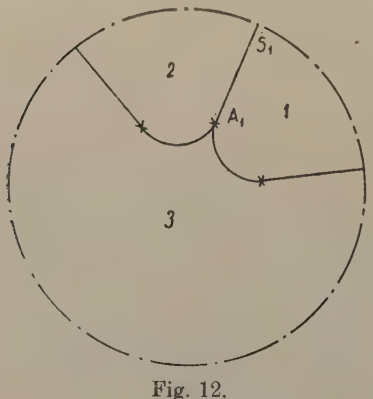



Fig. 12.

Zu den den Funktionen (2) und (3) angehörenden Riemannschen Flächen gelangt man durch folgende Überlegung.

Setzt man den in der $z$-Ebene der Figur 10a dargestellten Bereich doppelt aneinander, so entsteht nebenstehendes Bild.

(Der strichpunktierte Kreis soll das Unendliche andeuten.)

Hierin sind die Teile 1 und 2 einfach, der Teil 3 aber doppelt bedeckt. Die beiden Blätter hängen längs der Geraden $A_1 S_1$ zusammen.

Setzt man nun $n$ solcher Bereiche in gleicher Art aneinander, so erhält man $n$ Blätter, aus deren jedem ein unendlicher Sektor, der im Scheitel von einem Hypozykloidenbogen begrenzt wird, herausgeschnitten zu denken ist. Das so definierte Gebiet wird durch Gleichung (2) auf das Äußere des Einheitskreises konform abgebildet. Die herausgeschnittenen Sektoren aber ergeben in ihrer Gesamtheit das schlichte Äußere der Hypozykloide, das sich durch dieselbe Funktion auf das Innere des Einheitskreises abbildete.

Die zur Funktion (2) gehörende Riemannsche Fläche läßt sich also folgendermaßen konstruieren:

Man lege $n$ Blätter übereinander und schneide sie längs zweier Geraden, die miteinander den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ bilden, in gleicher Entfernung vom Nullpunkt beginnend bis ins Unendliche hin auf. Jedes Blatt wird gegen das folgende durch den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ um den Nullpunkt gedreht, so daß immer je zwei Schnitte benachbarter Blätter zusammenfallen, der des letzten wieder mit dem des ersten Blattes. Längs dieser Schnitte sind die Blätter zu verbinden.

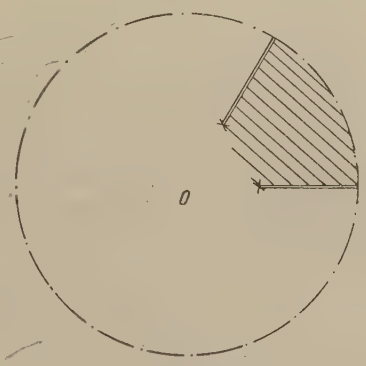


Fig. 13.

Die Endpunkte der Schnitte sind Windungspunkte erster Ordnung.

Der Nullpunkt kann auf jedem der Blätter gesondert umlaufen werden. Interessant ist das Verhalten im unendlich fernen Punkt. Umläuft man diesen auf den in Figur 13 schraffierten Teilen der einzelnen Blätter, so wird die Kurve bei einmaliger Umdrehung geschlossen, da diese Teile in den Schnitten zusammenhängen. Umläuft man ihn aber auf den nicht schraffierten Teilen, so kommt man erst nach einer Umdrehung von $\frac{2\pi}{n}(n-1)$ in das folgende Blatt. Die Umlaufungskurve schließt sich also erst nach $n-1$ ganzen Umdrehungen.

Die zu der Funktion (3) gehörende Riemannsche Fläche ist die gleiche mit dem Unterschied, daß die Zuordnung der Blätter zu den

Sektoren der $w'$-Ebene die entgegengesetzte ist wie bei der Funktion (2), denn die $w$- und $w'$-Ebenen gehen durch die Transformation durch reziproke Radien am Einheitskreise ineinander über.

Wir hatten bis jetzt für das Radienverhältns $n$ nur positive ganze Zahlen zugelassen. Wir wollen unsere Betrachtungen auch auf die Fälle ausdehnen, in welchen es beliebig positiv rational oder irrational ist.

Das bisher benutzte Verfahren läßt sich auch hier anwenden.

Das Radienverhältnis sei zunächst ein rationaler irreduzibler Bruch $\frac{\mu}{\nu}$, wo $\mu$ und $\nu$ positive ganze Zahlen sein sollen. In diesem Falle besteht die Hypozykloide aus $\mu$ Einzelbogen und ist erst nach $\nu$ Umlaufungen um den festen Kreis geschlossen. Der Sektor, der zum einzelnen Bogen gehört, hat den Winkel $\frac{2\pi\cdot\nu}{\mu}$. Für den Radius des rollenden Kreises wollen wir auch hier den Wert 1 beibehalten. Dann besteht die Gleichung (1) zu Recht, sofern man $n=\frac{\mu}{\nu}$ setzt. Wir erhalten also:

$$(7) \quad \ldots \ldots \quad z=\left(\frac{\mu}{\nu}-1\right)e^{ti}+qe^{\left(\frac{\mu}{\nu}-1\right)ti}.$$

Bezüglich der konformen Abbildung, die diese Funktien vermittelt, gilt folgender Sachverhalt. Die Kontur der Hypozykloide entspricht der Strecke von 0 bis $2\pi\cdot\nu$ in der $t$-Ebene. Teilt man diese in $\mu$ gleiche Teile ein und zieht durch die Teilpunkte die Parallelen zur negativen Achse des Imaginären, so entsprechen diesen die von den Punkten $A_\lambda$ in der Richtung $\frac{2\pi\cdot\nu}{\mu}\cdot\lambda$ ins Unendliche verlaufenden Halbstrahlen. $\lambda$ zählt hier von 0 bis $\mu-1$. Bei den Ausnahmestellen traten $n$-te Wurzeln mit ihren $n$ Werten auf. Statt dieser erhält man hier $\mu$ Werte, da $\sqrt[\nu]{A}=\sqrt[\mu]{A^\nu}$ ist. Sonst ist von der Bedingung, daß $n$ ganzzahlig ist, nur in Spezialfällen Gebrauch gemacht. Daher bleiben alle weiteren Entwicklungen den obigen analog.

Die Teilabbildungen, wie sie in den Figuren 1 bis 3 dargestellt sind, gelten hier genau ebenso. Auch ihre Weiterbehandlung für die Abbildung auf den Einheitskreis gestaltet sich analog. Will man aber wie oben das ganze Äußere der hier vorliegenden Kurven betrachten, so muß man schon bei den gewöhnlichen und den verkürzten Kurven aus der schlichten Ebene herausgehen. Die in Frage stehenden Gebiete liegen auf einer $\nu$-blättrigen Riemannchen Fläche,

die im Nullpunkt und im unendlich fernen Punkt Windungspunkte $(\nu - 1)$-ter Ordnung hat. Durch die Funktion (7) werden diese Gesamtbereiche auf Parallelhalbstreifen von der Breite $2\pi \cdot \nu$ abgebildet. Um auf den Einheitskreis zu kommen, muß man also zunächst $t' = \frac{t}{\nu}$ substituieren. Die weitere Behandlung bleibt dann dieselbe wie oben. Im Falle der verlängerten Hypozykloiden besteht die zugehörige Riemannsche Fläche aus $\mu$ Blättern. Ihr Aussehen ist im übrigen das gleiche, wie es oben besprochen wurde.

Ist das Radienverhältnis irrational, so können sich die Kurven überhaupt nicht mehr schließen. In Gleichung (1) ist $n$ als irrationale Zahl anzusehen. Die Teilabbildungen bleiben dieselben wie bisher. Die Riemannsche Fläche hat unendlich viele Blätter.

## II. Epizykloidisch begrenzte Gebiete.

Unter den gleichen Voraussetzungen wie im ersten Kapitel gilt für die epizykloidische Bewegung der $\zeta$-Ebene in der festen $z$-Ebene die Gleichung

$$z = (n+1)\,e^{ti} + [\zeta - (n+1)]\,e^{(n+1)ti}.$$

Der Mittelpunkt des rollenden Kreises liegt hier bei Beginn der Bewegung im Punkte $z = n+1$.

Für $\zeta$ als den die Kurve erzeugenden Punkt setzen wir den reellen Wert $n+1-q$ ein, wieder mit der Beschränkung $q > 0$. Denn für $\zeta = n+1+q_1$ erhalten wir die gleiche Kurve wie für $\zeta = n+1-q_1$, die gegen diese nur durch den Winkel $\frac{\pi}{n}$ um den Nullpunkt gedreht erscheint. Wir erhalten daher die Gleichung

(8) . . . . . $\mathbf{z = (n+1)\,e^{ti} - q\,e^{(n+1)ti}}$.

Für $q = 0$ ist dies die Gleichung des Kreises um 0 durch den Punkt $z = n+1$ also eine ausgeartete Epizykloide, die wir im folgenden außer acht lassen.

Für $q = 1$ ergibt sich die gewöhnliche Epizykloide, die in den $n$ Punkten

$$z = n \cdot \sqrt[n]{1} = n \cdot e^{\frac{2\pi}{n}\lambda i} \quad [\lambda = 0, 1, \ldots n-1]$$

ihre Spitzen hat.

Für $q = \vartheta$ $[0 < \vartheta < 1]$ erhält man die Gleichung der verkürzten, für $q = p$ $[p > 1]$ die der verlängerten Epizykloiden.

Setzen wir $t = \tau + i\sigma$, so stellt die Gleichung (8) eine analytische Funktion dar. Wir betrachten die durch sie vermittelte konforme Abbildung.

Wir ermitteln zunächst die Ausnahmestellen. Dazu bilden wir den Differentialquotienten

$$\frac{dz}{dt} = i(n+1)\,e^{ti}(1 - q\,e^{nti}),$$

der die Werte

$$t = \frac{\ln q}{n} i + \frac{2\pi}{n}\lambda$$

als endliche Nullstellen hat. Diesen entsprechen nach Gleichung (8) die Punkte

$$z = n\sqrt[n]{\frac{1}{q}},$$

falls man unter $\sqrt[n]{\frac{1}{q}}$ die $n$ Werte der $n$-ten Wurzel versteht. Die zweite Ableitung

$$\frac{d^2z}{dt^2} = (n+1)\,e^{ti}\,[(n+1)\,q\,e^{nti} - 1]$$

ist an diesen Nullstellen von $\frac{dz}{dt}$ von Null verschieden, so daß in den genannten Ausnahmestellen der Funktion Winkelverdoppelung stattfindet.

Auch der unendlich ferne Punkt ist singulär. Denn läßt man $t$ in Richtung der positiven bzw. negativen Achse des Imaginären ins Unendliche gehen, so strebt $z$ mit allen seinen Ableitungen gegen den Wert Null bzw. unendlich hin.

Entsprechend den verschiedenen Werten von $q$ liegen die Punkte $t = \frac{\ln q}{n} i + \frac{2\pi}{n}\lambda$ auf $[q = 1]$, unterhalb $[q = \vartheta]$ oder oberhalb $[q = p]$ der Achse des Reellen im gleichen Abstande von dieser und zwar in jedem Falle auf den Parallelen zur Achse des Imaginären durch die Punkte $\frac{2\pi}{n}\lambda$.

Die $n$ Punkte $z = n\sqrt[n]{\frac{1}{q}}$ haben den gleichen absoluten Betrag. Ihre Lage ist auf den Halbstrahlen $S_\lambda$ (s. Fig. 14), die mit der Achse des Reellen die Winkel $\frac{2\pi}{n}\lambda$ bilden. Für $q = 1$ liegen sie auf dem festen Kreise, für $q = \vartheta$ außerhalb desselben und für $q = p$ in seinem Innern. Demnach fallen die Ausnahmestellen bei der gewöhnlichen Epizykloide in die Spitzen der Kurve. Bezüglich der verkürzten Kurve bilden wir

$$f(\vartheta) = n\sqrt[n]{\frac{1}{\vartheta}} - (n+1-\vartheta).$$

Für $\vartheta = 1$ ist $f(\vartheta) = 0$, für $\vartheta = 0$ wird $f(\vartheta) = +\infty$.

$$\frac{df(\vartheta)}{d\vartheta} = 1 - \sqrt[n]{\frac{1}{\vartheta^{n+1}}}$$

ist für alle zulässigen $\vartheta$ negativ. Also wächst $f(\vartheta)$ monoton von 0 bis $+\infty$, wenn $\vartheta$ von 1 bis 0 abnimmt. D. h. die Ausnahmepunkte liegen außerhalb der verkürzten Epizykloiden und zwar um so entfernter, je kleiner $\vartheta$ ist, je mehr sich also das Aussehen der Kurve dem eines Kreises nähert.

Im Hinblick auf die verlängerten Epizykloiden setzen wir

$$f(p) = n\sqrt[n]{\frac{1}{p}} - (n+1-p).$$

Für $p = 1$ ist $f(p) = 0$. Wächst $p$ über alle Grenzen, so wird auch $f(p) = +\infty$.

$$\frac{df(p)}{dp} = 1 - \sqrt[n]{\frac{1}{p^{n+1}}}$$

ist für alle zulässigen Werte von $p$ positiv. $f(p)$ wächst mithin monoton von 0 bis $\infty$, wenn $p$ von 1 bis $\infty$ wächst. D. h. $f(p)$ ist immer positiv. Somit liegen die Ausnahmestellen innerhalb der Schleifen der Kurve und zwar in dem Teile, der in das Innere des festen Kreises fällt. Für endliche $p$ bleibt $n\sqrt[n]{\frac{1}{p}}$ immer positiv.

Da $\lim_{p=\infty} n\sqrt[n]{\frac{1}{p}} = 0$ ist, streben die Ausnahmestellen mit wachsendem $p$ immer mehr gegen den Nullpunkt hin.

Wir betrachten nun in der $t$-Ebene einen Halbstreifen, der begrenzt wird von den Parallelen zur positiven Achse des Imaginären durch die Punkte $\frac{2\pi}{n}\lambda$ und $\frac{2\pi}{n}(\lambda+1)$, sowie von der zwischen diesen beiden Punkten liegenden Strecke der Achse des Reellen. Zufolge Gleichung (8) entspricht letzterer in der $z$-Ebene der Kurvenbogen, der zwischen den Halbstrahlen $S_\lambda$ und $S_{\lambda+1}$ liegt.

Für

$t = \frac{2\pi}{n}\lambda + i\sigma \quad [0 \leqq \sigma < \infty]$ wird $z = e^{\frac{2\pi}{n}\lambda i}\left[(n+1)e^{-\sigma} - qe^{-(n+1)\sigma}\right]$.

Hierin ist

$$|z| = r = (n+1)e^{-\sigma} - qe^{-(n+1)\sigma}$$

und

$$\text{ampl } z = \frac{2\pi}{n}\lambda.$$

Daher liegen alle hier in Frage stehenden Werte von $z$ auf dem Halbstrahl $S_\lambda$. Für $\sigma = 0$ wird $r = n + 1 - q$, für $\sigma = +\infty$ wird $r = 0$. Der Differentialquotient $\frac{dr}{d\sigma} = (n+1)e^{-\sigma}(qe^{-n\sigma} - 1)$ ist für positive $\sigma$ negativ, solange $q \leqq 1$ ist. Bezeichnen wir die Schnittpunkte der Halbstrahlen $S_\lambda$ mit den Epizykloiden wieder mit $A_\lambda$, so können wir sagen, daß bei der gewöhnlichen und bei den verkürzten Epizykloiden den Parallelen zur positiven Achse des Imaginären der $t$-Ebene durch die Punkte $\frac{2\pi}{n}\lambda$ in der $z$-Ebene die Strecken $\overrightarrow{A_\lambda 0}$ zugeordnet sind. Folglich wird ein von einem einzelnen Bogen dieser Kurven überdachter Sektor mit dem Winkel $\frac{2\pi}{n}$ durch die Funktion (8) auf den betrachteten Halbstreifen von der Breite $\frac{2\pi}{n}$

konform abgebildet, denn im Innern liegen keine für die Abbildung singulären Punkte.

Man kann nun wieder mehrere solcher Bereiche aneinander setzen. Will man das ganze Innere[1]) dieser Kurven in Betracht ziehen, so muß man in der $z$-Ebene auf der Strecke $\overrightarrow{A_0 0}$ einen Schnitt anbringen, da $z = 0$ eine Ausnahmestelle ist. Dem oberen Ufer dieses Schnittes entspricht dann in der $t$-Ebene die positive Achse des Imaginären, dem unteren die Parallele zu dieser durch den Punkt $t = 2\pi$. Wir erhalten also folgende Abbildungen:

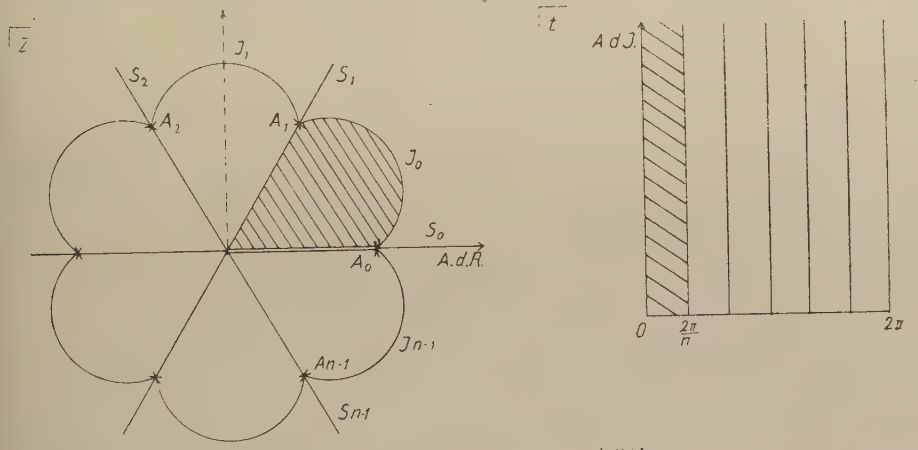



Fig. 14. $z = (n+1)\, e^{ti} - e^{(n+1)ti}$.

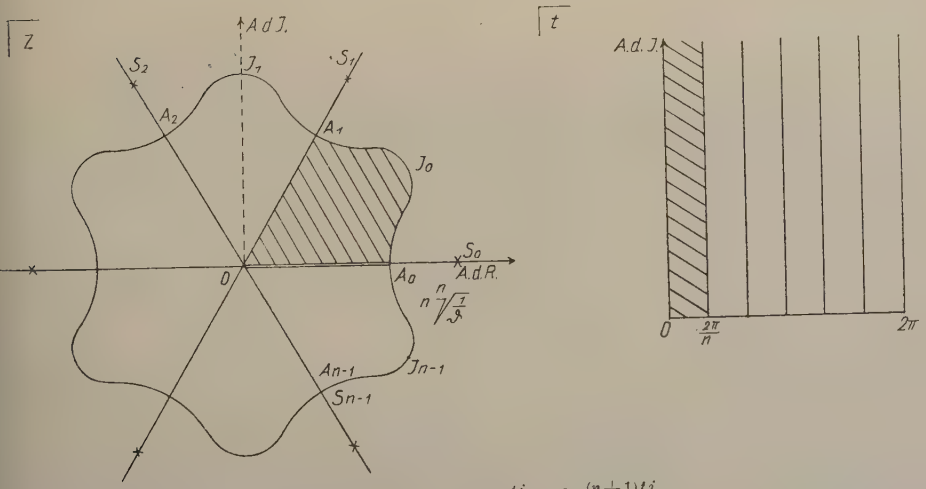



Fig. 15. $z = (n+1)\, e^{ti} - \vartheta\, e^{(n+1)ti}$.

[1]) Das Äußere der Epizykloiden läßt sich nach diesem Verfahren nicht mit behandeln. (Vgl. hierzu Kapitel V.)

Bei den verlängerten Epizykloiden ist der Sachverhalt ähnlich wie bei den verlängerten Hypozykloiden. Dem einzelnen Kurvenbogen entspricht die Strecke von $t = \frac{2\pi}{n}\lambda$ bis $t = \frac{2\pi}{n}(\lambda+1)$. Setzt man $q = p$, so ist für $t = \frac{2\pi}{n}\lambda + i\sigma$ der absolute Betrag von $z$

$$r = (n+1)e^{-\sigma} - pe^{-(n+1)\sigma}.$$

Für $\sigma = 0$ ist $r = n+1-p$, für $\sigma = \frac{\ln p}{n}$ ist $r = n\sqrt[n]{\frac{1}{p}}$, wenn schließlich $\sigma$ über alle Grenzen wächst, strebt $r$ gegen den Wert Null hin. Die Ableitung $\frac{dr}{d\sigma} = (n+1)e^{-\sigma}(pe^{-n\sigma} - 1)$ ist nun aber für $\sigma = \frac{\ln p}{n}$ gleich Null.

Für kleinere $\sigma$ ist sie positiv, für größere negativ. Wenn also $\sigma$ von 0 bis $\frac{\ln p}{n}$ wächst, nimmt $r$ von $n+1-p$ bis $n\sqrt[n]{\frac{1}{p}}$ monoton zu, wächst $\sigma$ weiter von $\frac{\ln p}{n}$ bis $+\infty$, so nimmt $r$ von $n\sqrt[n]{\frac{1}{p}}$ bis 0 monoton ab. Analog früherem bringen wir daher in der $z$-Ebene auf den Strahlen $S_\lambda$ und $S_{\lambda+1}$ von den Punkten $A_\lambda$ und $A_{\lambda+1}$ bis zu den Ausnahmestellen Schnitte an. Der so definierte Bereich wird also durch die Funktion (8) auf einen Halbstreifen von der Breite $\frac{2\pi}{n}$ konform abgebildet. Zur Veranschaulichung diene die folgende Figur.

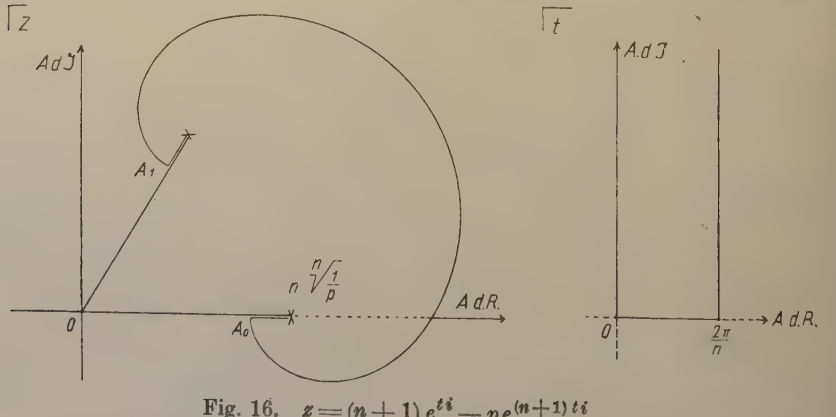



Fig. 16. $z = (n+1)e^{ti} - pe^{(n+1)ti}$.

Wir können nun wieder $n$ solcher Bereiche zu einem Gesamtbereich auf einer Riemannschen Fläche vereinen, deren Blätter paar-

weise längs der Schnitte zusammenhängen. Die Ausnahmestellen werden wieder Windungspunkte erster Ordnung. Das so verstandene Innere einer verlängerten Epizykloide bildet sich also durch die Funktion (8) konform auf einen Halbstreifen von der Breite $2\pi$ ab. Die Schnitte kommen als solche in Fortfall, da sie nun nicht mehr zur Berandung zählen. Einer der Windungspunkte muß mit dem Nullpunkt durch einen Schnitt verbunden werden, dessen Ufer den Parallelen des Halbstreifens zugeordnet sind. An dieser Stelle ist auch der frühere Schnitt zu belassen.

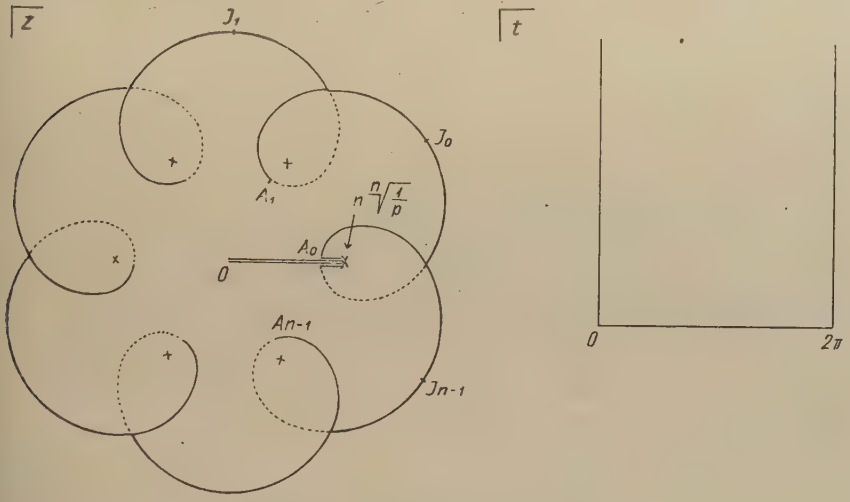



Fig. 17. $z = (n+1)\, e^{ti} - p e^{(n+1)ti}$.

Die weitere Abbildung des Inneren der Epizykloiden auf das Innere des Einheitskreises führt auf ganze rationale Funktionen. Denn es ist $t' = it$; $w = e^{t'} = e^{ti}$, so daß sich aus Gleichung (8) die Funktion ergibt:

$$(9) \quad \ldots\ldots\ldots \quad z = (n+1)\, w - q w^{n+1}.$$

Diese wollen wir wieder für sich genauer betrachten. Zunächst bilden wir den Differentialquotienten

$$\frac{dz}{dw} = (n+1)(1 - q w^n).$$

Seine Nullstellen sind die $n$ Werte

$$w = \sqrt[n]{\frac{1}{q}},$$

die für $q = 1$ auf dem Einheitskreise, für $q = \vartheta$ außerhalb desselben und für $q = p$ in seinem Innern liegen. Ihnen entsprechen nach Gleichung (9) in der $z$-Ebene die Punkte

$$z = n\sqrt[n]{\frac{1}{q}}.$$

Das sind dieselben Ausnahmestellen, die sich aus Gleichung (8) ergaben. Auch bei der hier betrachteten Abbildung findet in ihnen Winkelverdoppelung statt, da

$$\frac{dz^2}{dw^2} = -(n+1)nqw^{n-1}$$

für $w = \sqrt[n]{\frac{1}{q}}$ von Null verschieden ist.

Läßt man $\frac{dz}{dw}$ über alle Grenzen wachsen, so wird $w$ und deshalb auch $z$ unendlich. Im unendlich fernen Punkt der $z$-Ebene besteht also keine Konformität. Dies können wir hier außer acht lassen, da wir nur endliche Bereiche betrachten. Wir kommen jedoch bei der Besprechung der Riemannschen Fläche darauf zurück, auf der sich der unendlich ferne Punkt als ein Windungspunkt $n$-ter Ordnung erweist.

Für $w = 0$ ist $z = 0$ aber $\frac{dz}{dw} = n + 1$ also endlich und von Null verschieden. Die Funktion ist daher im Nullpunkt regulär. Durch die Funktion (8) bildete sich das geschlitzte Innere der Epizykloiden auf den Halbstreifen und dieser durch die Substitution $w = e^{it}$ wieder auf den geschlitzten Einheitskreis ab. Die Schlitze, die bei der Abbildung auf den Halbstreifen notwendig waren, kommen hier gegen den Schlitz im Einheitskreise in Fortfall.

Auf der Peripherie des Einheitskreises ist $|w| = 1$, also kann man setzen $w = e^{ti}\,[0 \leqq t \leqq 2\pi]$. Dadurch geht Gleichung (9) sofort in Gleichung (8) über. D. h. aber, daß die Peripherie des Einheitskreises tatsächlich der Kontur der Epizykloide entspricht. Funktion (9) vermittelt also die konforme Abbildung des Inneren der Epizykloiden auf das Innere des gewöhnlichen Einheitskreises.

Für $w = 1$ ist $z = n + 1 - q$, für $w = 0$ ist $z = 0$. Die Ableitung $\frac{dz}{dw}$ ist für alle $1 > w > 0$ positiv, solange $q \leqq 1$ ist. Für $q = p\,(> 1)$ wird $\frac{dz}{dw} = 0$, wenn $w = \sqrt[n]{\frac{1}{p}}$ ist. Ist $w$ größer, so wird $\frac{dz}{dw}$ negativ, für kleinere $w$ wird es positiv. Was wir hier für den

Halbstrahl $S_0$ bewiesen haben, gilt ebenso für die anderen Halbstrahlen. Somit bekommen wir durch die Funktion (9) Einzelabbildungen eines von einem Bogen der Epizykloiden überdachten Sektors auf einen Sektor des Einheitskreises von gleichem Winkel $\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, wie es in der folgenden Figur besonders hervorgehoben ist.

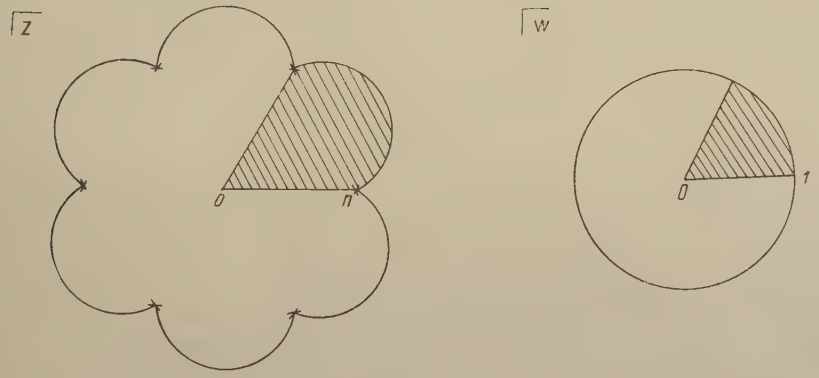



Fig. 18. $z = (n+1)\,w - w^{n+1}$.

Die analogen Abbildungen vermitteln die Funktionen:

$$z = (n+1)\,w - \vartheta w^{n+1}$$

und

$$z = (n+1)\,w - p w^{n+1},$$

wo die Bilder des Einheitskreises in der $z$-Ebene verkürzte bzw. verlängerte Epizykloiden sind.

Um die einzelnen Sektoren für sich weiter auf den ganzen Einheitskreis abzubilden, substituieren wir $W = w^n$, also $w = \sqrt[n]{W}$. Daher wird

$$(10) \quad \ldots\ldots\ldots \quad z = \sqrt[n]{W}\,(n+1-q\,W).$$

Hierbei ist der Einheitskreis aber wieder von 1 bis 0 aufgeschlitzt zu denken. Es ist $\frac{dz}{dW} = \frac{n+1}{n}\,W^{\frac{1}{n}-1}(1-q\,W)$ mit der Nullstelle $\frac{1}{q}$, der nach Gleichung (10) die Werte $z = n\sqrt[n]{\frac{1}{q}}$ entsprechen. Von den $n$ Werten der $n$-ten Wurzel kommen hier nur zwei in Betracht. Die zweite Ableitung ist für $W = \frac{1}{q}$ von Null verschieden.

Also besteht auch bei dieser Abbildung in den Ausnahmestellen der Funktion Winkelverdoppelung. Der Fall, daß $n = 1$ ist, scheidet hier aus, da der Sektor dann schon bezüglich der Funktion (9) gleich einem ganzen Kreise ist. Für $n = 2, 3, \ldots$ wird $\frac{dz}{dW}$ unendlich, wenn $W = 0$ ist. Hierfür ist $z = 0$. Der Nullpunkt der $z$-Ebene ist also eine Ausnahmestelle und zwar sind die Winkel hier $n$-mal so klein wie in dem Nullpunkt der $W$-Ebene.

Es entsprechen sich also folgende Gebiete:

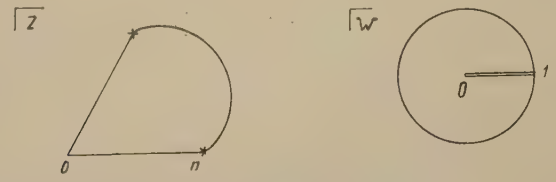



Fig. 19. $z = \sqrt[n]{W}\,(n+1-W)$.

Gehört der Kurvenbogen einer verkürzten bzw. verlängerten Epizykloide an, so lauten die Funktionen, die die analogen Abbildungen leisten

$$z = \sqrt[n]{W}\,(n+1-\vartheta W)$$

bzw.

$$z = \sqrt[n]{W}\,(n+1-pW).$$

Weitere Resultate ergibt die Betrachtung des Abbildungscharakters der Funktionen (8) bis (10).

Wir zeigen zunächst, daß den Parallelen zur positiven Achse des Imaginären der $t$-Ebene durch die Punkte $t = \frac{\pi}{n}(2\lambda - 1)$ in der $z$-Ebene die Strecken $\overrightarrow{J_\lambda 0}$[1]) auf denjenigen Halbstrahlen entsprechen, welche mit der Achse des Reellen die Winkel $\frac{\pi}{n}(2\lambda - 1)$ einschließen. Setzt man, um dies zu beweisen, in Gleichung (8) den Wert

$$t = \frac{\pi}{n}(2\lambda - 1) + i\sigma$$

ein, wo $0 \leqq \sigma < \infty$ ist, so wird

$$z = e^{\frac{\pi}{n}(2\lambda-1)i} \cdot e^{-\sigma}(n + 1 + qe^{-n\sigma}).$$

[1]) Siehe Fig. 14ff.

Hierin ist

$$\text{ampl } z = \frac{\pi}{n}(2\lambda - 1)$$

und

$$|z| = r = e^{-\sigma}(n + 1 + qe^{-n\sigma}).$$

Für $\sigma = 0$ ist $r = n + 1 + q$, d. i. der absolute Betrag der Punkte $J_\lambda$. Wächst $\sigma$ über alle Grenzen, so wird $r = 0$. Der Differentialquotient $\frac{dr}{d\sigma} = -(n+1)e^{-\sigma}[1 + qe^{-n\sigma}]$ ist aber für alle $\sigma$ negativ. Folglich fällt $r$ von $n + 1 + q$ monoton bis 0, wenn $\sigma$ von 0 bis $+\infty$ wächst. Damit ist die Behauptung erwiesen. Den genannten Geraden der $t$-Ebene entsprechen in der $w$-Ebene aber die die einzelnen Sektoren halbierenden Geraden von der Peripherie des Einheitskreises bis zum Nullpunkt.

Setzen wir nun $t = \tau + i\sigma$ und betrachten $\tau$ als variabel von 0 bis $2\pi$, während wir $\sigma$ als konstant ansehen, so ergibt sich aus der Gleichung (8)

$$z = e^{-\sigma}\{(n+1)e^{\tau i} - (qe^{-n\sigma})e^{(n+1)\tau i}\}.$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer stellt eine Epizykloide dar. Der für die Gestalt der Kurve typische Faktor hat den Wert $q \cdot e^{-n\sigma}$, der entsprechend den verschiedenen Werten von $q$ und $\sigma$ alle positiven Werte annehmen kann. Der Faktor $e^{-\sigma}$ vor der Klammer bewirkt eine verkleinernde Ähnlichkeitstransformation dieser Kurven, da $e^{-\sigma}$ für alle positiven $\sigma$ kleiner als 1 ist. Für $\sigma = \frac{\ln q}{n}$ wird der typische Faktor gleich 1, so daß eine gewöhnliche Epizykloide resultiert. $e^{-\sigma}$ ist dann gleich $\sqrt[n]{\frac{1}{q}}$. Bezüglich des festen Kreises, der zu der bei der Betrachtung des Abbildungscharakters zugrunde gelegten Kurve gehört, würden die Spitzen der gewöhnlichen Epizykloide in die Punkte $n\sqrt[n]{1}$ fallen. Zufolge des Verkleinerungsfaktors $\sqrt[n]{\frac{1}{q}}$ fallen sie hier also in die Punkte $n\sqrt[n]{\frac{1}{q}}$. Das sind die Ausnahmestellen der Funktion, deren Abbildungscharakter wir betrachten.

Auch im übrigen gelten hier die gleichen Schlüsse wie an der entsprechenden Stelle im vorigen Kapitel.

Es bleibt noch übrig, die allgemeinen zu den Epizykloiden orthogonalen Trajektorien anzugeben. Wir benutzen hierzu Gleichung (9) und setzen

$$w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Dann ist $w^{n+1} = r^{n+1}[\cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi]$.

Bei Trennung der reellen und imaginären Bestandteile wird daher aus Gleichung (9):

$$\left.\begin{aligned} x &= (n+1)r\cos\varphi - q\,r^{n+1}\cos(n+1)\varphi \\ y &= (n+1)r\sin\varphi - q\,r^{n+1}\sin(n+1)\varphi \end{aligned}\right\}.$$

Diese Gleichungen repräsentieren bei konstantem $r$ eine Epizykloide, bei konstantem $\varphi$ stellen sie eine Parameterdarstellung der zu den Epizykloiden orthogonalen Trajektorien dar.[1]) Sie sind algebraische Kurven, da eine rationale Parameterdarstellung vorliegt.

Der Abbildungscharakter der Funktionen (8) und (9) ist durch die Figur 20 (S. 35) dargestellt. Der Abbildungscharakter der Funktion (10) ist hieraus ohne weiteres mit ersichtlich. Er steht in Analogie zu dem der Funktion (4) aus dem vorigen Kapitel. In der $W$-Ebene erhalten wir volle Kreise, die den einzelnen Kurvenbogen entsprechen.

Hieraus lassen sich nun wieder eine große Anzahl von Teilabbildungen herleiten. Wir begnügen uns mit dem Hinweis auf die Figuren 8 und 9 aus dem vorangegangenen Kapitel, mit denen hier vollständige Analogie besteht.

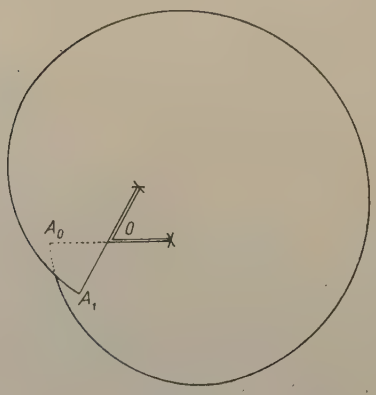


Fig. 21.

Wir müssen nun noch eines besonderen Falles Erwähnung tun, daß die Schleifen der verlängerten Epizykloiden über den Nullpunkt hinausragen, sobald $p > n+1$ ist.[2]) Dann ist die Darstellung eines auch nur von einem einzelnen Kurvenbogen begrenzten Sektors schon nicht mehr in der schlichten Ebene möglich, da sich die Enden der Schleifen überdecken.

---

[1]) Soweit diese keine Geraden sind, lassen wir sie in der Figur wieder fort.

[2]) Das Analogon bei den Hypozykloiden führt zu keiner Besonderheit.

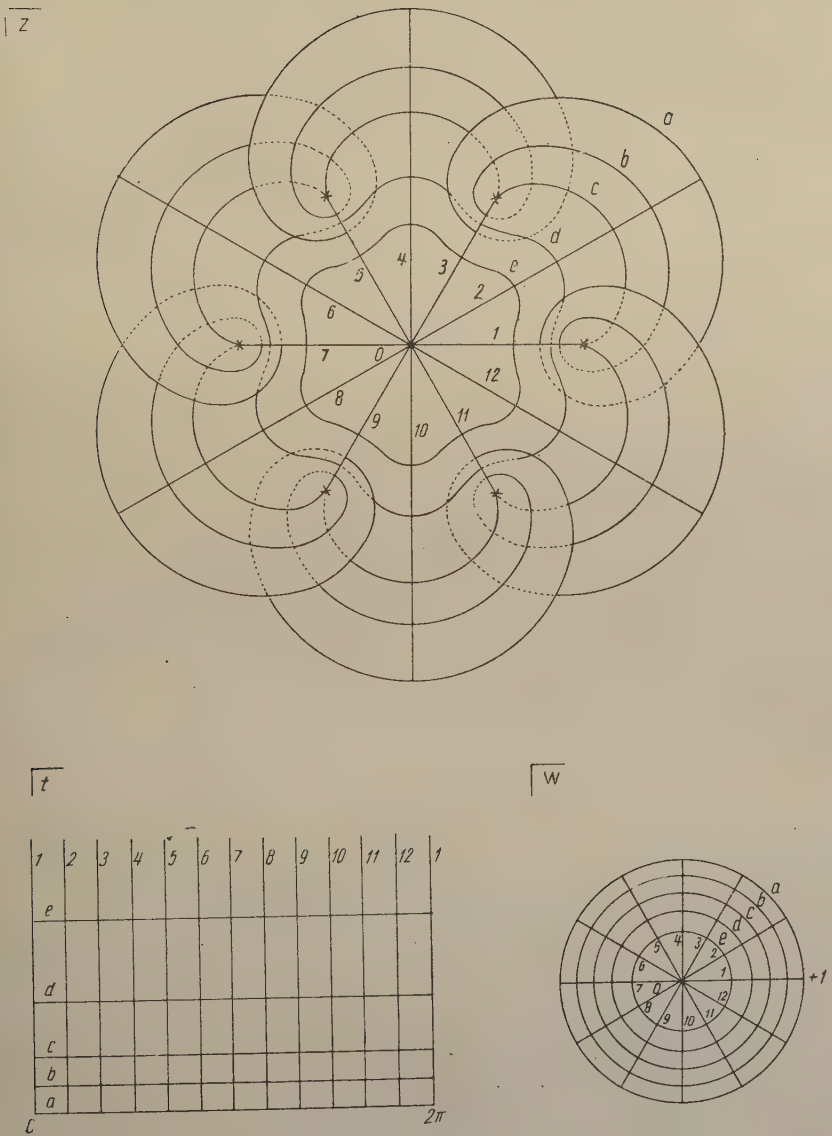



Fig. 20.

$$z = (n+1)\,e^{ti} - q\,e^{(n+1)ti};\quad z = (n+1)\,w - q w^{n+1}$$

Die Ausnahmepunkte rücken, wie oben bewiesen wurde, mit wachsendem $p$ immer näher an den Nullpunkt heran. Solange $p$ endlich ist, bleibt die Spitze des Sektors erhalten. Vom Nullpunkt bis zu den Ausnahmepunkten sind die Schnitte anzubringen. Die über jenen hinausragenden Stücke der Geraden gehören lediglich zur Begrenzung.

Auch diese Bereiche lassen sich zu mehreren aneinander setzen, jedoch nur auf der Riemannschen Fläche, deren Blätter dann längs der genannten Schnitte paarweise zusammenhängen. (In der Figur durch Kreuze markiert.)

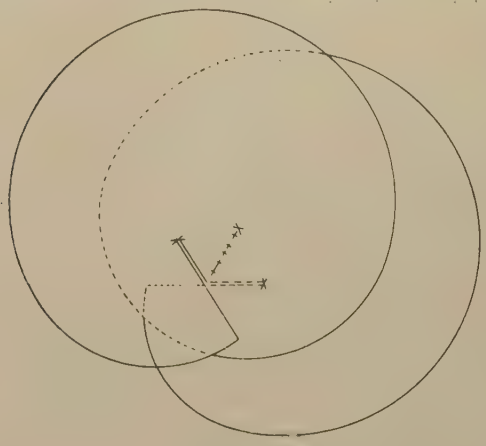


Fig. 22.

Bei der Darstellung des Abbildungscharakters (in Fig. 20) können wir wie im vorigen Kapitel jede beliebige Epizykloide als Ausgangskurve ansehen, deren Bilder in der $t$- und $w$-Ebene dann als Achse des Reellen bzw. als Einheitskreis anzusprechen sind. Wählen wir z. B. die gewöhnliche Kurve, so ist die zugrunde zu legende Gleichung:

$$z = (n+1)\,e^{ti} - e^{(n+1)ti}.$$

Hieraus muß sich, wenn man in $t = \tau + i\sigma$ $\tau$ als variabel betrachtet, für negative $\sigma$ eine verlängerte Epizykloide ergeben, deren Schleifen um so größer sind, je mehr sich $\sigma$ negativ von der Achse des Reellen entfernt. In der Tat ist in der resultierenden Gleichung

$$z = e^{-\sigma}\left\{(n+1)\,e^{\tau i} - (e^{-n\sigma})\,e^{(n+1)\tau i}\right\}$$

der typische Faktor $e^{-n\sigma}$ wie auch der Streckungsfaktor $e^{-\sigma}$ größer als 1, da $\sigma$ negativ ist. In der $w$-Ebene ist das Bild dieser Kurve dann ein Kreis um den Nullpunkt, der größer als der Einheitskreis ist. Läßt man nun $\sigma$ negativ sehr groß werden, so umschreibt ein einzelner Bogen dieser verlängerten Epizykloide ein sehr großes Gebiet, das im Grenzwert für $\sigma = -\infty$ in das Äußere des von einem Einzelbogen der zugrunde gelegten Kurve überdachten Sektors übergeht. Das Äußere muß hier aber so verstanden werden, daß der unendliche Scheitelwinkel des Sektors doppelt zu zählen ist, da sich die Enden der Schleifen unserer Kurve überdecken. Das so

beschriebene Gebiet, das wieder auf der Riemannschen Fläche liegt, wird durch die Funktion (8) auf einen ins Negativ-imaginäre verlaufenden Parallelhalbstreifen von der Breite $\frac{2\pi}{n}$ abgebildet. Durch die Substitution $w' = e^{-int}$ geht dieser in das Innere des geschlitzten Einheitskreises über. Dadurch kommen wir zu der Gleichung

$$(11) \quad \ldots \ldots \quad z = \sqrt[n]{\frac{1}{w'}}\left(n+1-q\frac{1}{w'}\right),$$

welche die folgenden Abbildungen vermittelt.

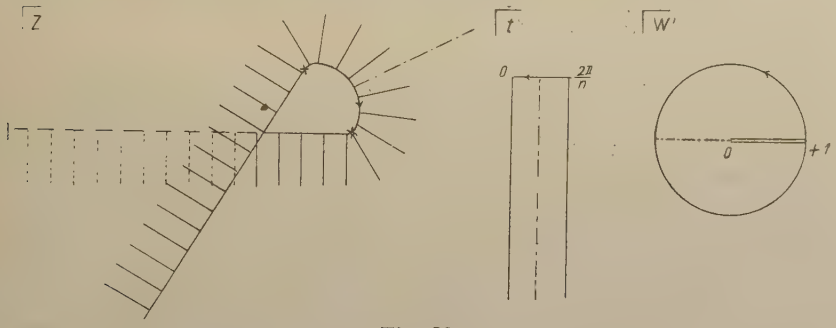



Fig. 23.

$$z = (n+1)\,e^{ti} - e^{(n+1)ti};\quad z = \sqrt[n]{\frac{1}{w'}}\left(n+1-\frac{1}{w'}\right).$$

Ganz entsprechend werden die Abbildungen, wenn der Kurvenbogen einer verkürzten bzw. einer verlängerten Epizykloide entnommen ist. Die Abbildungsfunktionen lauten dann:

$$z = (n+1)\,e^{ti} - \vartheta\,e^{(n+1)ti};\quad z = \sqrt[n]{\frac{1}{w'}}\left(n+1-\vartheta\frac{1}{w'}\right)$$

$$\text{bzw. } z = (n+1)\,e^{ti} - p\,e^{(n+1)ti};\quad z = \sqrt[n]{\frac{1}{w'}}\left(n+1-p\frac{1}{w'}\right).$$

Bei den verkürzten Epizykloiden liegen die Ausnahmestellen im Innern des abzubildenden Gebietes. Hier müssen Schnitte angebracht werden analog wie in der Figur 10b des vorigen Kapitels.

Wichtiger sind die sechs Teilabbildungen, die sich hieraus ergeben, da sie in der schlichten Ebene liegen. Um die Abbildung dieser Teilgebiete auf den vollen Einheitskreis zu erhalten, setzen wir $w'' = w'^2$. Es resultiert die Gleichung:

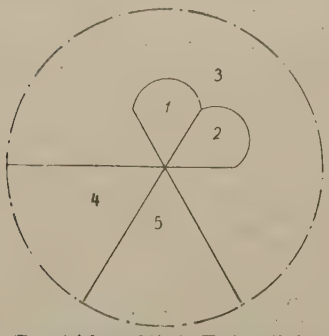
$$(12) \quad \ldots \ldots \quad z = \sqrt[2n]{\frac{1}{w''}}\left(n+1-q\frac{1}{\sqrt{w''}}\right).$$

Wir begnügen uns damit, den ersten Typus zu veranschaulichen.

Fig. 24. $z = \sqrt[2n]{\frac{1}{w''}}\left(n+1-\frac{1}{\sqrt{w''}}\right)$.

Die übrigen fünf Typen werden analog.

Setzt man den in der $z$-Ebene der Figur 23 dargestellten Bereich doppelt aneinander, so ergibt sich folgendes Bild:




(Der strich-punktierte Kreis soll das Unendliche andeuten.)

Fig. 25.

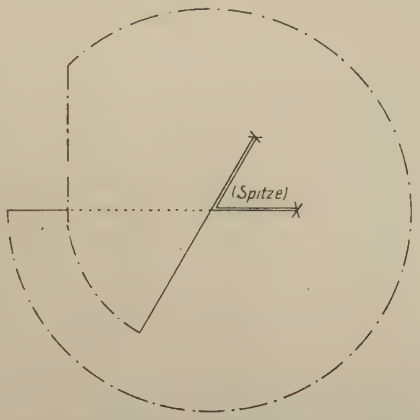
Hierin sind die Teile 1 und 2 einfach, Teil 3 doppelt, 4 und 5 dreifach bedeckt.

Setzt man den Bereich der $z$-Ebene aus Fig. 23 $n$-mal aneinander, so wird das Innere der Epizykloide $n$-fach, die ganze übrige Ebene $(n+1)$-fach bedeckt.

Daß dieser so beschriebene Bereich durch Gleichung (8) auf den ins Negativ-imaginäre verlaufenden Halbstreifen von der Breite $2\pi$ abgebildet wird, interessiert nur insofern, als letzterer durch die Substitution $w = e^{it}$ in das Äußere des Einheitskreises übergeht. Nimmt man nun das Innere der Epizykloide mit hinzu, so sieht man, daß die Funktion (9) eine ein-eindeutige Beziehung herstellt zwischen der schlichten $w$-Ebene und einer $(n+1)$-blätterigen Riemannschen Fläche von folgender Beschaffenheit. In zentralsymmetrischer Anordnung gruppieren sich um den Nullpunkt herum $n$-Windungspunkte erster Ordnung. Je zwei aufeinander folgende Blätter hängen längs der Schnitte, die von den Windungspunkten bis zum Nullpunkt zu legen sind, zusammen. Das $(n+1)$-ste Blatt hängt wieder mit dem ersten zusammen. Der Zusammenhang dieser beiden Blätter ist nun aber auf der Geraden, die den Windungspunkt mit dem Nullpunkt verbindet, bis ins Unendliche auszudehnen, wie bei der Riemannschen Fläche, die zu der Funktion $z = w^{n+1}$ gehört.

Der Nullpunkt kann innerhalb der Windungspunkte auf zwei verschiedene Arten umlaufen werden. Um hier klarer zu sein, wollen wir hervorheben, daß die Gesamtfläche aus $n$ Teilflächen von der Art zusammengesetzt ist, wie Figur 26 zeigt.

Bewegt man sich nun auf einer Spitze, so kommt man beim Passieren des Schnittes auf die Spitze der anstoßenden Teilfläche, so daß bei einer ganzen Umlaufung des Nullpunktes der Weg über die Spitzen aller $n$ Teilflächen führt.




(Die strich-punktierte Linie soll das Unendliche andeuten.)

Fig. 26.

Die andere Art der Umlaufung des Nullpunktes zeigt sich folgendermaßen. Bei der Funktion $z = w^{n+1}$ ist der Nullpunkt ein Windungspunkt $n$-ter Ordnung. Dies trifft hier nicht zu, da je zwei Teilflächen längs eines endlichen Schnittes, der bis an den Nullpunkt geht, zusammenhängen. Umläuft man diesen nun, ohne auf einer Spitze zu beginnen, so kommt man zufolge des Schnittes nicht, wie bei der Funktion $z = w^{n+1}$, in das folgende, sondern bleibt auf demselben Blatt, so daß sich die Umlaufungskurve schon nach einmaliger Umdrehung schließt.

Außerhalb der Windungspunkte wird ein Kreis erst nach $(n+1)$-maliger Umlaufung geschlossen. Hier ist die Fläche mit derjenigen, die zur Funktion $z = w^{n+1}$ gehört, identisch. Der unendlich ferne Punkt ist also ein Windungspunkt $n$-ter Ordnung.

Auch bezüglich der Epizykloiden können wir unsere Betrachtungen auf den Fall ausdehnen, in dem das Radienverhältnis $n$ positiv rational bzw. irrational ist.

Es sei zunächst $n = \frac{\mu}{\nu}$, wo $\mu$ und $\nu$ positive ganze Zahlen darstellen. Wir haben wieder $\mu$ Einzelbogen und $\nu$ Umläufe um den festen Kreis, bis die Kurve in sich selbst zurückkehrt. Analog zu Gleichung (7) wird hier

$$(13) \quad \ldots\ldots\ldots \quad z = \left(\frac{\mu}{\nu} + 1\right) e^{ti} - q\, e^{\left(\frac{\mu}{\nu}+1\right)ti}.$$

Im übrigen besteht völlige Analogie zu den entsprechenden Betrachtungen des vorigen Kapitels mit einer Ausnahme. Bei den ver-

längerten Hypozykloiden bestand die Riemannsche Fläche aus $\mu$ Blättern. Bei den verlängerten Epizykloiden sind es $\mu + \nu$. Denn jede der $\mu$ Teilflächen hat den Zentriwinkel

$$2\pi + \frac{2\pi \cdot \nu}{\mu} = \frac{2\pi(\mu + \nu)}{\mu},$$

so daß der Gesamtumlauf den Winkel $2\pi(\mu + \nu)$ hat. (Vgl. hierzu Figur 26.)

Ist schließlich das Radienverhältnis $n$ irrational, so gilt hier dasselbe, was bei den Hypozykloiden gesagt wurde.

# III. Zykloidisch begrenzte Gebiete.

Die Gleichung

$$z = (\zeta - i)\, e^{-it} + i + t$$

charakterisiert die zykloidische Bewegung der $\zeta$-Ebene in der festen $z$-Ebene, sofern man unter $t$ den Wälzungswinkel versteht und der Radius des rollenden Kreises gleich 1 angenommen wird. Das Abrollen des Kreises erfolgt hierbei vom Nullpunkte beginnend auf der positiven Achse des Reellen.

Setzt man für $\zeta$ als den die Kurve erzeugenden Punkt den Wert $(1 - q)\, i$ ein [1]), so bekommt man für $\zeta = (1 - q_1)\, i$ die gleiche nur um die Strecke $\pi$ seitlich verschobene Kurve wie für $\zeta = (1 + q_1)\, i$, weshalb wir uns wieder auf positive Werte von $q$ beschränken können. Wir erhalten die Gleichung:

$$(14) \quad \ldots\ldots\ldots \quad z = t + i\,(1 - q\, e^{-it}).$$

Für $q = 0$ ist dies die Gleichung der Parallelen zur Achse des Reellen durch den Mittelpunkt des rollenden Kreises, die man als eine ausgeartete Zykloide ansprechen kann. Wir lassen sie im folgenden außer acht.

Für $q = 1$ ergibt sich die gewöhnliche Zykloide, deren Spitzen in die Punkte $z = 2\pi\lambda$ $[\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots]$ fallen. Für $q = \vartheta$ $[0 < \vartheta < 1]$ erhält man die Gleichung einer verkürzten, für $q = p$ $[p > 1]$ die einer verlängerten Zykloide.

Setzt man $t = \tau + i\,\sigma$, so stellt Gleichung (14) eine analytische Funktion dar. Wir wollen die durch sie vermittelten konformen Abbildungen betrachten.

Um die Ausnahmestellen zu finden, bilden wir den Differentialquotienten

$$\frac{dz}{dt} = 1 - q\, e^{-it},$$

der die Nullstellen:

$$t = 2\pi\lambda - i \ln q$$

besitzt. Diesen entsprechen in der $z$-Ebene die Punkte:

$$z = 2\pi\lambda - i \ln q.$$

---

[1]) So gewählt, damit wieder für $q = 0$ der Mittelpunkt und für $q = 1$ der Fußpunkt des Kreises in der Anfangslage gewonnen wird.

Da die zweite Ableitung

$$\frac{d^2 z}{d t^2} = i q e^{-it}$$

an den Nullstellen der ersten von Null verschieden ist, so tritt in den Ausnahmestellen der Funktion Winkelverdoppelung ein. Für endliche $t$ bleibt $\frac{dz}{dt}$ stets endlich. Im Unendlichen ist die Funktion wesentlich singulär.

Aus $z = 2\pi\lambda - i \ln q$ ergibt sich für $q = 1$ der Wert $z = 2\pi\lambda$, für $q = \vartheta$ wird $z = 2\pi\lambda + i \ln \frac{1}{\vartheta}$ und für $q = p$ ist schließlich $z = 2\pi\lambda - i \ln p$, wo $\ln \frac{1}{\vartheta}$ und $\ln p$ für alle zulässigen Werte von $\vartheta$ und $p$ positiv sind. Demnach liegen die Ausnahmepunkte in der $z$-Ebene in jedem Falle auf den Parallelen zur Achse des Imaginären durch die Punkte $2\pi\lambda$. Sofern es sich um die gewönliche Zykloide handelt, liegen sie auf der Achse des Reellen, bei den verkürzten Zykloiden oberhalb, bei den verlängerten unterhalb jener. Wir wollen nun ihre Lage bezüglich der Kurven selbst feststellen. Bei der gewöhnlichen Zykloide fallen sie mit den Spitzen der Kurve zusammen. Im Hinblick auf die verkürzten Kurven bilden wir

$$f(\vartheta) = \ln \frac{1}{\vartheta} - (1 - \vartheta).$$

Für $\vartheta = 1$ ist $f(\vartheta) = 0$, für $\vartheta = 0$ wird $f(\vartheta) = +\infty$. Da nun $\frac{d f(\vartheta)}{d\vartheta} = 1 - \frac{1}{\vartheta}$ für alle $0 < \vartheta < 1$ negativ ist, so wächst $f(\vartheta)$ monoton von 0 bis $\infty$, wenn $\vartheta$ von 1 bis 0 abnimmt. $f(\vartheta)$ ist also für alle zulässigen Werte von $\vartheta$ positiv. Das bedeutet aber, daß die Ausnahmestellen oberhalb der verkürzten Zykloide liegen, und zwar um so höher, je kleiner $\vartheta$, d. h. je gestreckter die Kurve ist. Analog bilden wir bezüglich der verlängerten Zykloide den Ausdruck

$$f(p) = (p - 1) - \ln p,$$

da die Minima der Kurve in den Punkten $z = 2\pi\lambda - i(p - 1)$ liegen. Für $p = 1$ ist $f(p) = 0$, für $p = +\infty$ wird auch $f(p) = +\infty$, da $p$ stärker unendlich wird als $\ln p$.

Der Differentialquotient $\frac{d f(p)}{d p} = 1 - \frac{1}{p}$ ist positiv für alle $p > 1$. Daher wächst $f(p)$ monoton von 0 bis $+\infty$, wenn $p$ die Werte von 1 bis $+\infty$ durchläuft. Mithin ist $f(p)$ für alle zulässigen Werte von $p$ positiv. D. h. die Ausnahmestellen liegen oberhalb der genannten Kurvenpunkte. Da sie andererseits unterhalb der Achse

des Reellen gelegen sind, fallen sie in das Innere der Schleifen der verlängerten Zykloiden.

Ist $t$ reell, so liefert Gleichung (14) für $z$ Werte, die auf der Kurve liegen. Der Strecke von $2\pi\lambda$ bis $2\pi(\lambda+1)$ der $t$-Ebene entspricht daher in der $z$-Ebene der $(\lambda+1)$ste Zykloidenbogen, wenn die Bogen vom Nullpunkt beginnend gezählt werden.

Wir betrachten nun in der $t$-Ebene eine Parallele zum negativen Teil der Achse des Imaginären durch den Punkt $t = 2\pi\cdot\lambda$. Für diese ist $t = 2\pi\lambda + i\sigma$, wo $\sigma$ alle Werte von 0 bis $-\infty$ durchläuft. Setzt man diesen Wert für $t$ in Gleichung (14) ein, so wird zunächst $e^{-it} = e^{-i(2\pi\lambda+i\sigma)} = e^{\sigma}$ also

$$z = 2\pi\lambda + i(1+\sigma - qe^{\sigma}).$$

Da $\sigma$ reell ist, ist bei Trennung der reellen und imaginären Bestandteile

$$x = 2\pi\lambda$$
$$y = 1+\sigma - qe^{\sigma}.$$

Für $\sigma = 0$ ist $y = 1-q$, d. i. der Anfangspunkt des zur Strecke $\overrightarrow{2\pi\lambda\ \ 2\pi(\lambda+1)}$ gehörenden Zykloidenbogens. Für $\sigma = -\infty$ wird auch $y = -\infty$. Nun ist der Differentialquotient $\frac{dy}{d\sigma} = 1 - qe^{\sigma}$ für alle negativen $\sigma$ positiv, solange $q \leqq 1$ ist. In diesem Falle nimmt also $y$ alle Werte von $1-q$ bis $-\infty$ monoton fallend an, wenn $\sigma$ die Werte von 0 bis $-\infty$ durchläuft. Der genannten Parallelen in der $t$-Ebene entspricht also im Falle der gewöhnlichen und der verkürzten Zykloiden in der $z$-Ebene die jener kongruent gelegene Parallele zur Achse des Imaginären, die bei den verkürzten Kurven jedoch schon oberhalb der Achse des Reellen in den Punkten

$$z = 2\pi\lambda + (1-\vartheta)i$$

ihren Anfang nimmt. Für $\lambda = 0$ sind diese Geraden die negativen Achsen des Imaginären selbst. Teilt man in der $z$- und in der $t$-Ebene die unteren Halbebenen durch die genannten Parallelen in Halbstreifen ein, so entspricht jedem Parallelhalbstreifen der $t$-Ebene in der $z$-Ebene ein kongruent gelegener jedoch von einem Bogen einer gewöhnlichen bzw. einer verkürzten Zykloide überdachter Halbstreifen. Denn der Achse des Reellen der $t$-Ebene entspricht in der $z$-Ebene die Kontur der Kurven. Die ganze von diesen Kurven überdachte Halbebene[1]) wird daher durch die Funktion (14), wo $q = 1$ bzw. $q = \vartheta$

[1]) Die oberhalb der Zykloiden gelegenen schlichten Gebiete lassen sich nach dem hier angewandten Verfahren nicht behandeln. (Hierzu vgl. Kapitel V.)

zu setzen ist, auf eine Halbebene konform abgebildet, denn im Innern der Gebiete liegen keine für die Abbildung singulären Punkte.

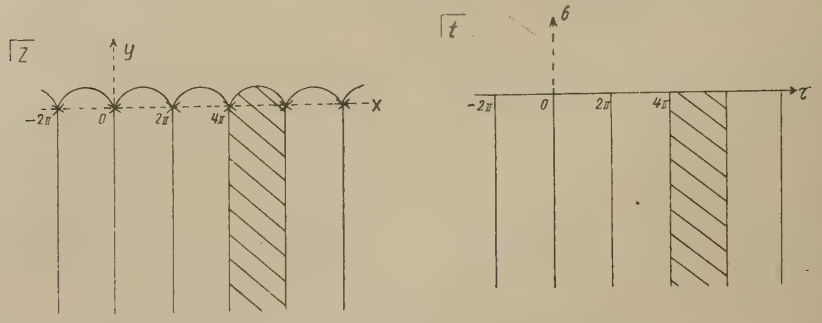



Fig. 27. $z = t + i(1 - e^{-it})$.

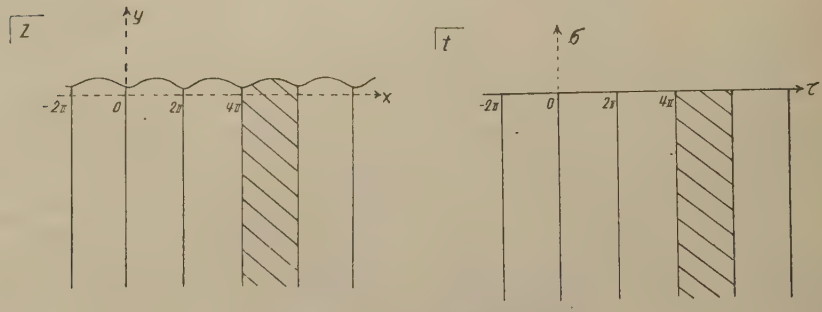



Fig. 28. $z = t + i(1 - \vartheta e^{-it})$.

Im einzelnen bildet sich hierbei jeder von einem oder $n$ Kurvenbogen[1]) überdachter Parallelhalbstreifen von der Breite $2\pi$ bzw. $2\pi \cdot n$ auf einen gleichbreiten Halbstreifen kongruenter Lage winkeltreu ab, wie es in den Figuren 27 und 28 an je einem dieser Streifen besonders hervorgehoben ist.

Es bleibt noch der Fall der verlängerten Zykloiden zu untersuchen, wo $q = p > 1$ zu setzen ist. Hier hat die Ableitung $\frac{dy}{d\sigma} = 1 - pe^{\sigma}$ nicht für alle negativen $\sigma$ das gleiche Vorzeichen. Denn für $\sigma = -\ln p$ wird $\frac{dy}{d\sigma} = 0$, für $\sigma > -\ln p$ ist $\frac{dy}{d\sigma}$ negativ und für $\sigma < -\ln p$ ist es positiv. Für $\sigma = -\ln p$ ist auch $y = -\ln p$, d. i. die Ordinate der Ausnahmepunkte. Wenn also $\sigma$ auf den betrachteten Parallelen

[1]) Die Zahl $n$ bleibt in diesem Kapitel stets ganzzahlig positiv, da sie hier kein Radienverhältnis darstellt, sondern lediglich die Anzahl der betrachteten Kurvenbogen angibt.

von 0 bis $-\ln p$ abnimmt, wächst $y$ monoton von $-(p-1)$ bis $-\ln p$, d. h. vom Minimum der Kurve bis zum Ausnahmepunkt. Fällt $\sigma$ weiter von $-\ln p$ bis $-\infty$, so nimmt auch $y$ von $-\ln p$ bis $-\infty$ ab. Um zu eindeutiger Ränderzuordnung zu gelangen, müssen wir analog früherem in der $z$-Ebene auf den Strecken von $2\pi\lambda - i(p-1)$ bis $2\pi\lambda - i\ln p$ Schnitte anbringen.

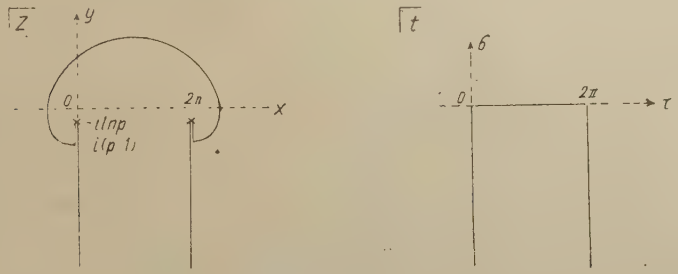



Fig. 29. $z = t + i(1 - pe^{-it})$.

Will man wieder die gesamte von der Kurve überdachte Halbebene betrachten, so kommt man aus der schlichten Ebene heraus auf eine Riemannsche Fläche, deren Blätter längs der genannten Schnitte zusammenhängen. Die Ausnahmepunkte werden zu Windungspunkten erster Ordnung. Durch die Funktion (14) wird für $q = p$ ein von $n$ Bogen der verlängerten Zykloide überdachter Halbstreifen auf einen Parallelhalbstreifen von der Breite $2\pi \cdot n$, also auch die gesamte so überdachte Halbebene auf eine schlichte Halbebene konform abgebildet. Die Schnitte werden mit Ausnahme der äußersten hierbei überflüssig, da sie nicht mehr zur Berandung zählen.

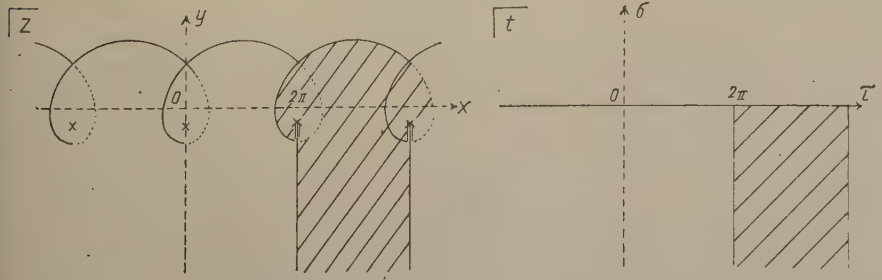



Fig. 30. $z = t + i(1 - pe^{-it})$.

Um die weitere Abbildung der Halbstreifen auf das Innere des Einheitskreises durchzuführen, setzen wir zunächst $t' = \frac{t}{n}$, wodurch

wir in der $t'$-Ebene für jedes $n$ einen Halbstreifen von der Breite $2\pi$ erhalten. Durch die Substitution $w = e^{-it'}$ geht dieser dann in den von 1 bis 0 aufgeschlitzten Einheitskreis über. Aus $w = e^{-i\frac{t}{n}}$ folgt $e^{-it} = w^n$ und $t = in \ln w + 2\pi\lambda$. Setzt man diese Werte in Gleichung (14) ein, so findet man

$$z = 2\pi\lambda + i(1 + n \ln w - qw^n).$$

Da die überdachten Halbstreifen der $z$-Ebene durch eine seitliche Verschiebung um $2\pi\lambda$ in kongruente Halbstreifen übergehen, die ihrerseits den gleichen Abbildungsfunktionen unterliegen, so können wir $\lambda = 0$ setzen. Es wird also:

(15) . . . . . $\boldsymbol{z = i\,(1 + n \ln w - qw^n)}$

die Funktion, welche die konforme Abbildung der betrachteten zykloidisch überdachten Halbstreifen von der Breite $2\pi \cdot n$ auf das Innere des von 1 bis 0 aufgeschlitzten Einheitskreises leistet. Man kann sich davon wieder durch eine direkte Verifikation überzeugen.

Die Ableitung

$$\frac{dz}{dw} = i\,n\,\frac{1}{w}(1 - qw^n)$$

ergibt gleich Null gesetzt die $n$ Werte $w = \sqrt[n]{\frac{1}{q}}$, denen nach Gleichung (15) als Ausnahmestellen der Funktion die Werte

$$z = 2\pi\lambda - i \ln q \quad [\lambda = 0, 1, \ldots, n-1]$$

entsprechen. In diesen Punkten findet Winkelverdoppelung statt, da die zweite Ableitung $\frac{d^2z}{dw^2}$ für $w = \sqrt[n]{\frac{1}{q}}$ von Null verschieden ist.

Läßt man $\frac{dz}{dw}$ über alle Grenzen wachsen, so strebt $w$ dem Werte Null oder unendlich zu, deren letzterer hier nicht in Betracht kommt. An der Nullstelle hat $\ln w$ einen Verzweigungspunkt unendlich hoher Ordnung. Der reelle Teil von $\ln w$ wird bestimmt negativ unendlich, der imaginäre Teil ist ganz unbestimmt. Die Funktion (15) ist also für den Wert $w = 0$ nicht regulär.

Die Lage der Punkte $w = \sqrt[n]{\frac{1}{q}}$ ist zentralsymmetrisch um den Nullpunkt herum. Bei der gewöhnlichen Zykloide liegen sie auf der Peripherie des Einheitskreises, bei den verkürzten Zykloiden außerhalb desselben und bei den verlängerten in seinem Innern.

Der Peripherie des Einheitskreises entspricht tatsächlich die Kontur der $n$ Zykloidenbogen. Denn da hier $|w| = 1$ ist, kann man setzen $w = e^{i\varphi}$, wo $\varphi$ von 0 bis $2\pi$ variiert, wenn man den Kreis

einmal umläuft. Dann ist $w^n = e^{in\varphi}$ und $\ln w = i\varphi$. Somit ergibt Gleichung (15)

$$z = -\varphi \cdot n + i(1 - qe^{-i(-\varphi n)}).$$

Setzt man $-\varphi \cdot n = t$, so resultiert Gleichung (14). Der Wert $-\varphi n$ besagt erstens, daß dem Kreise $n$ Bogen der Zykloide entsprechen und zweitens, daß bei positiver Umlaufung des Kreises die Zykloide in Richtung der negativen Achse des Reellen durchlaufen werden muß. Die betrachteten Gebiete liegen dann beide linkerhand.

Dem Schnitte von 1 bis 0 in der $w$-Ebene entsprechen in der $z$-Ebene die den Halbstreifen begrenzenden Parallelen. Und zwar ist die linke dem unteren, die rechte dem oberen Ufer des Schlitzes zugeordnet.

Besondere Erwähnung verdient der Fall, in dem $n = 1$ ist. Dann lautet die allgemeine Gleichung

(16) . . . . . $z = i(1 + \ln W - qW)$

und der den Ausnahmestellen äquivalente Punkt wird $W = \frac{1}{q}$.

Wir erhalten also die folgenden Abbildungen.

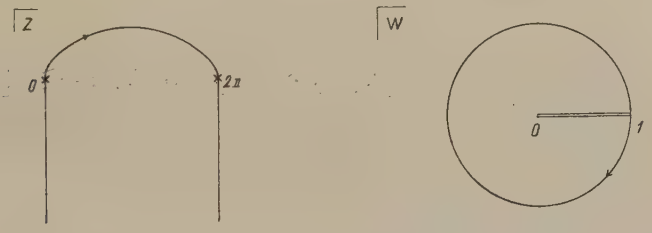



Fig. 31. $z = i(1 + \ln W - W)$.

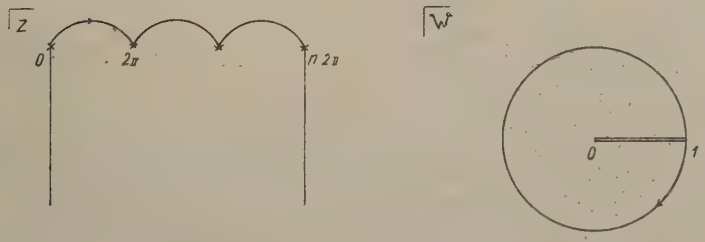



Fig. 32. $z = i(1 + n \ln w - w^n)$.

Ganz analog werden die Abbildungen für die verkürzten bzw. verlängerten Zykloiden, für die dann die Gleichungen lauten:

$$z = i(1 + \ln W - \vartheta W)$$
$$z = i(1 + n \ln w - \vartheta w^n)$$

bzw.

$$z = i(1 + \ln W - pW)$$
$$z = i(1 + n \ln w - pw^n).$$

Der Abbildungscharakter der Funktionen (14) bis (16) kann in gleicher Weise wie in den ersten Kapiteln ermittelt werden.

Setzt man in Gleichung (14) die Werte $t = \pi(2\lambda - 1) + i\sigma$ ein und betrachtet $\sigma$ als variabel zwischen 0 und $-\infty$, so wird

$$e^{-it} = e^{-i\pi(2\lambda-1)} \cdot e^{\sigma} = -e^{\sigma},$$

und man findet

$$z = \pi(2\lambda - 1) + i(1 + \sigma + qe^{\sigma}),$$

oder getrennt $x = \pi(2\lambda - 1)$ und $y = 1 + \sigma + qe^{\sigma}$. $x$ ist konstant, während $y$ mit von 0 bis $-\infty$ abnehmendem $\sigma$ die Werte von $1 + q$ bis $-\infty$ monoton fallend durchläuft; denn $\frac{dy}{d\sigma} = 1 + qe^{\sigma}$ ist immer positiv. Die Punkte $z = \pi(2\lambda - 1) + i(1 + q)$ sind die Maxima der Zykloiden. Also entsprechen auch den Parallelen zur negativen Achse des Imaginären der $t$-Ebene durch die Punkte $\pi(2\lambda - 1)$ in der $z$-Ebene kongruent gelegene Geraden, die ihren Anfang jedoch schon in den Scheitelpunkten der Kurven nehmen.

Betrachten wir nun in der unteren Halbebene von $t$ eine Parallele zur Achse des Reellen, so haben wir $\tau$ als variabel anzusehen und für $\sigma$ einen beliebigen aber konstanten Wert zwischen 0 und $-\infty$ einzusetzen. Alsdann wird:

$$z = i\sigma + \{\tau + i[1 - (qe^{\sigma})e^{-i\tau}]\}.$$

Da $\tau$ reell ist und $q \cdot e^{\sigma}$ immer positiv bleibt, stellt der Ausdruck in der geschweiften Klammer eine allgemeine Zykloide dar, deren typischer Faktor $qe^{\sigma}$ darüber entscheidet, ob es sich um eine gewöhnliche, verkürzte oder verlängerte Zykloide handelt. Der vor der Klammer stehende Summand $i\sigma$ besagt, daß diese Zykloiden parallel zur Achse des Imaginären um den Wert $\sigma$ verschoben sind. Für $\sigma = -\ln q$ wird der typische Faktor gleich 1, also resultiert dann eine gewöhnliche Zykloide, die in den Ausnahmepunkten der zugrunde gelegten Kurve ihre Spitzen hat. Ist $\sigma < -\ln q$, so ist $qe^{\sigma} < 1$, für $\sigma > -\ln q$ wird $qe^{\sigma} > 1$. Diesen Fällen entsprechen also die verkürzten bzw. die verlängerten Zykloiden.

Die Bilder der Parallelen zur Achse des Imaginären der $t$-Ebene durch die Punkte $t = 2\pi\lambda$ und $t = \pi(2\lambda - 1)$ sind in der $w$-Ebene zufolge der Substitution $w = e^{-i\frac{t}{n}}$ Halbstrahlen vom Nullpunkte aus. Die Bilder der Parallelen zur Achse des Reellen sind konzentrische Kreise um den Nullpunkt.

Um die allgemeinen zu den Zykloiden orthogonalen Trajektorien anzugeben, benutzen wir Gleichung (14). Setzt man $t = \tau + i\sigma$, so wird

$$\begin{aligned} z &= \tau + i\sigma + i(1 - qe^{-i\tau} \cdot e^{\sigma}) \\ &= \tau + i\sigma + i[1 - q(\cos\tau - i\sin\tau)e^{\sigma}]. \end{aligned}$$

Bei Trennung der reellen und imaginären Bestandteile wird:

$$\left.\begin{aligned} x &= \tau - q e^{\sigma} \sin \tau \\ y &= \sigma + 1 - q e^{\sigma} \cos \tau \end{aligned}\right\}.$$

Für konstantes $\sigma$ stellen diese Gleichungen eine Zykloide dar, für konstantes $\tau$ die zu diesen Zykloiden orthogonalen Trajektorien.[1]) Sie sind transzendente Kurven.

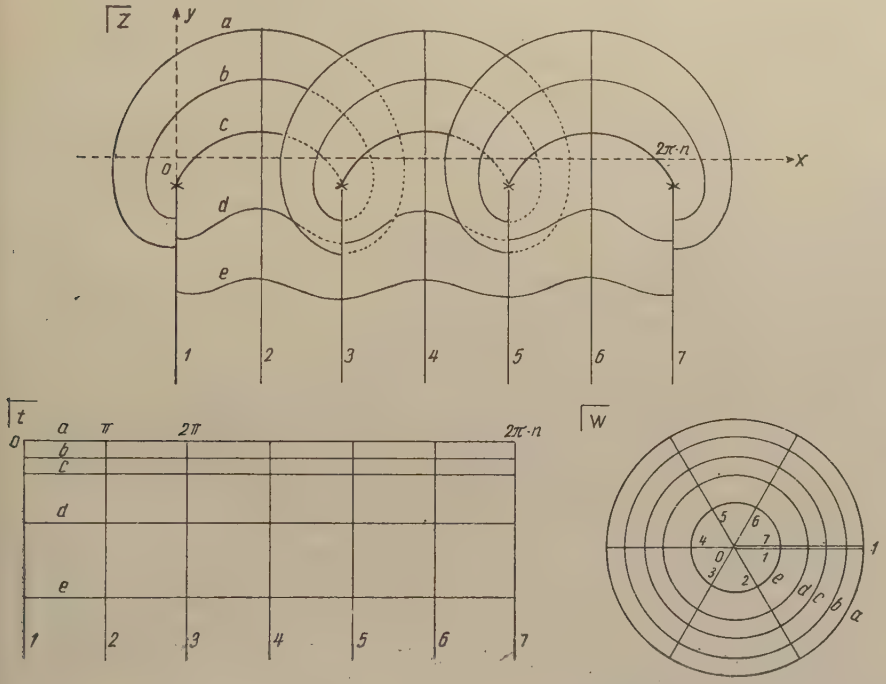



Fig. 33. $z = t + i(1 - qe^{-it})$; $z = i(1 + n \ln w - qw^n)$.

Der Abbildungscharakter der Funktion (16) ist hieraus ohne weiteres mit ersichtlich. In der $W$-Ebene bekommt man volle Kreise als Bilder der einzelnen Kurvenbogen.

Es ergeben sich wieder eine große Anzahl von Teilabbildungen in vollständiger Analogie mit den Abbildungen, wie sie im ersten Kapitel in den Figuren 8 und 9 dargestellt sind.

In der Figur 33 war zur Darstellung des Abbildungscharakters der allgemeinen Gleichungen (14) und (15) für $q$ ein Wert $p > 1$ zugrunde gelegt, so daß die Achse des Reellen der $z$-Ebene oberhalb der Ausnahmestellen zu liegen kam. In der $t$-Ebene war

[1]) In die Figur sind diese nur aufgenommen, soweit sie geradlinig sind.

somit die mit $a$ bezeichnete Gerade als Achse des Reellen anzusehen. Wir können nun aber auch jede ihrer Parallelen zur Achse des Reellen machen, z. B. die mit $c$ bezeichnete Gerade, der in der $z$-Ebene die gewöhnliche Zykloide entspricht. Alsdann stellt Figur 33 den Abbildungscharakter derselben Funktionen dar, in denen nur für $q$ ein anderer Wert angenommen ist, in unserem Beispiel $q = 1$. Dann ist hier also die Gleichung

$$z = t + i(1 - e^{-it})$$

zugrunde gelegt. Setzt man hierin $t = \tau + i\sigma$ und nimmt für $\sigma$ einen positiven Wert an, so stellt der Ausdruck in der geschweiften Klammer der Gleichung

$$z = i\sigma + \{\tau + i[1 - e^{\sigma} \cdot e^{-i\tau}]\},$$

da $e^{\sigma} > 1$ ist, eine verlängerte Zykloide dar, deren Windungspunkte in die Ausnahmepunkte der zugrunde gelegten Zykloide also hier auf die Achse des Reellen fallen müssen. Denn es ist $-i \ln q = -i \ln e^{\sigma} = -i\sigma$, was sich mit dem vor der Klammer stehenden Summanden $i\sigma$ zu Null ergänzt. Wählt man nun ein sehr großes positives $\sigma$, so umschreibt der Bogen der diesem $\sigma$ entsprechenden verlängerten Zykloide ein sehr großes Gebiet (zufolge $e^{\sigma} = q$), das schließlich im Genzwert für $\sigma = +\infty$ in das Äußere des von einem Bogen der zugrunde gelegten Zykloide überdachten Halbstreifens übergeht, welches sich somit auf einen ins Positiv-imaginäre verlaufenden Halbstreifen in der $t$-Ebene abbildet. Dieser läßt sich seinerseits durch die Substitution $w' = e^{it}$ auf das Innere des geschlitzten Einheitskreises zurückführen. Hierbei ist $e^{-it} = \frac{1}{w'}$ und $t = -i \ln w'$, so daß sich aus Gleichung (14) die Funktion ergibt

$$(17) \qquad z = i\left(1 - \ln w' - q\frac{1}{w'}\right).$$

Wir erhalten also die folgenden Abbildungen.

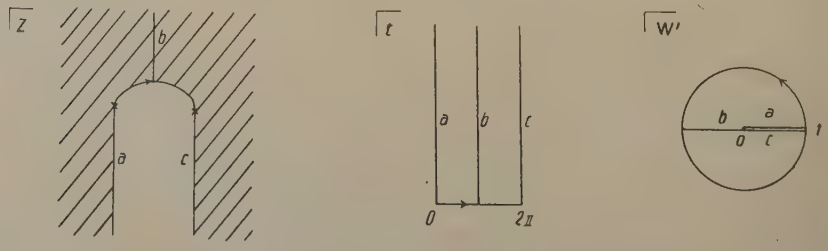



Fig. 34. $z = t + i(1 - e^{-it})$; $z = i\left(1 - \ln w' - \frac{1}{w'}\right)$.

Entsprechend werden die Figuren, wenn der Kurvenbogen einer verkürzten bzw. einer verlängerten Zykloide entnommen ist. Die zugehörigen Funktionen sind dann (14) und (17), wenn in ihnen statt $q$ $\vartheta$ bzw. $p$ gesetzt wird. Im Falle der verkürzten Zykloiden fallen die Ausnahmestellen in das Innere des abzubildenden Gebietes. Sie sind durch Schnitte analog denen der Figur 10b) auszunehmen.

Aus diesen Abbildungen ergeben sich wieder sechs Teilabbildungen, die besonders hervorgehoben zu werden verdienen. In der $t$-Ebene erhält man Halbstreifen von der Breite $\pi$. Diese werden durch die Substitution $w' = e^{it}$ auf einen Halbkreis, durch $w'' = e^{i2t}$ auf den geschlitzten Einheitskreis gebracht. Wir bekommen also die Funktion:

$$(18) \quad \ldots\ldots \quad z = i\left(1 - \frac{1}{2}\ln w'' - q\sqrt{\frac{1}{w''}}\right).$$

Wir begnügen uns wieder damit, nur den ersten Typus durch eine Figur zu veranschaulichen.

Das Bild des $2\pi \cdot n$ breiten Halbstreifens der $t$-Ebene ist in der $z$-Ebene eine $n$-blätterige Riemannsche Fläche, aus deren jedem Blatt ein einfach zykloidisch überdachter Halbstreifen von der Breite $2\pi$ herausgeschnitten zu denken ist. Jedes dieser untereinander kongruenten Blätter ist gegen das unter ihm liegende parallel der Achse des Reellen um die Strecke $2\pi$ verschoben. Dadurch stoßen je zwei Schnittufer verschiedener Ebenen aneinander. Die Blätter hängen längs dieser Schnitte zusammen.

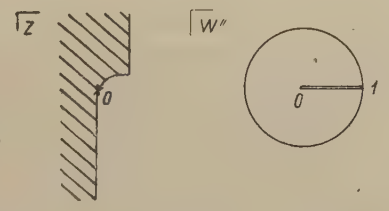



Fig. 35.

$$z = i\left(1 - \frac{1}{2}\ln w'' - \sqrt{\frac{1}{w''}}\right).$$

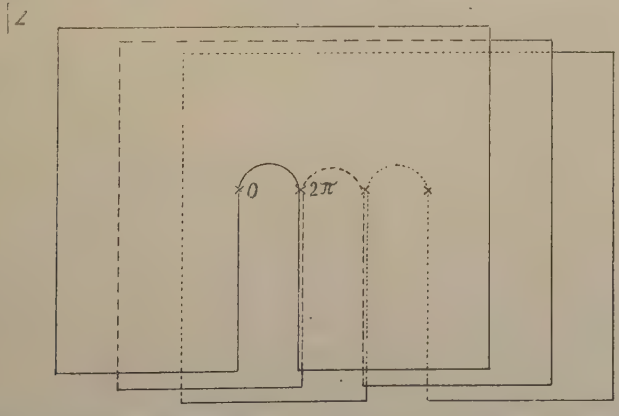



Fig. 36. Jeder ausgeschnittene Streifen ist $(n - 1)$-fach überdeckt.

Dieser Bereich, wie er durch Fig. 36 dargestellt ist, wird durch die Funktion (14) auf einen ins Positiv-imaginäre verlaufenden Halbstreifen von der Breite $2\pi \cdot n$ und durch die Funktion (15) auf das Äußere des Einheitskreises konform abgebildet. Die Gesamtheit der ausgeschnittenen Stücke ist aber nichts anderes als der $2\pi \cdot n$ breite, zykloidisch überdachte, schlichte Halbstreifen, der sich durch die Funktion (14) auf den ins Negativ-imaginäre verlaufenden gleich breiten Halbstreifen und durch die Funktion (15) auf das Innere des Einheitskreises abbildete.

Die zur Funktion (15) gehörende Riemannsche Fläche läßt sich also folgendermaßen konstruieren: Man lege $n$ Blätter übereinander, die je längs zweier Parallelen vom Abstande $2\pi$ in gleicher Entfernung von der Achse des Reellen beginnend bis ins Unendliche aufgeschnitten sind. Jedes Blatt wird gegen das vorhergehende um die Strecke $2\pi$ längs der Achse des Reellen verschoben, so daß immer je zwei Schnitte benachbarter Blätter zusammenfallen. Längs dieser Schnitte sind die Blätter in paarweiser gegenseitiger Durchdringung miteinander zu verbinden. Die Endpunkte der Schnitte sind dann Windungspunkte erster Ordnung. Jedem Blatt der Fläche entspricht in der $w$-Ebene ein unendlicher Sektor mit dem Winkel $\frac{2\pi}{n}$.

Die zur Funktion (14) gehörende Riemannsche Fläche hat das gleiche Aussehen mit dem Unterschied, daß hier unendlich viele Blätter vorliegen, deren jedes in der $t$-Ebene einem ganzen Parallelhalbstreifen von der Breite $2\pi$ entspricht. Dies steht mit dem Obigen in Einklang, da unendliche Sektoren am unendlich großen Kreise zu Parallelstreifen werden, die bei endlicher Breite in unendlicher Anzahl auftreten müssen. Der Winkel $\lim\limits_{n=\infty} \frac{2\pi}{n}$ ist dann gleich Null.

# IV. Von Kreisevolventen begrenzte Gebiete.

Die Gleichung

$$z = (\zeta - it)\, e^{it}$$

charakterisiert die evolventische Bewegung der $\zeta$-Ebene in der festen $z$-Ebene. $t$ ist der Wälzungswinkel. Als Nullpunkt der $z$-Ebene ist der Mittelpunkt des festen Kreises gewählt, dessen Radius gleich 1 angenommen ist.

Beim Beginn der Bewegung berührt die rollende Gerade den Kreis im Punkte $z = 1$.

Für $\zeta$ als den die Kurve erzeugenden Punkt setzen wir den Wert $1 + k$ ein, wo $k$ auf reelle Werte beschränkt ist. Für $k = 0$ erhält man die gewöhnliche, für $k > 0$ die verkürzte[1]) und für $k < 0$ die verlängerte Kreisevolvente. Es entsteht die Gleichung:

$$(19) \qquad z = (1 + k - it)\, e^{it}.$$

Wir fassen $t$ als komplexe Zahl auf, $t = \tau + i\sigma$, und untersuchen die so durch (19) dargestellte analytische Funktion im Hinblick auf die durch sie vermittelte konforme Abbildung.

Um die Ausnahmestellen zu finden, bilden wir den Differentialquotienten

$$\frac{dz}{dt} = (ik + t)\, e^{it},$$

der als einzige Nullstelle den Wert

$$t = -ik$$

besitzt. Diesem entspricht nach Gleichung (19) als Ausnahmestelle der Funktion der Wert

$$z = e^{k},$$

in welcher Winkelverdoppelung eintritt, da $\frac{d^2 z}{dt^2} = (1 - k + it)\, e^{it}$ für $t = -ik$ endlich und von Null verschieden ist.

---

[1]) Die Bezeichnungen „verkürzt“ und „verlängert“ habe ich in Analogie mit den anderen Rollkurven auch bei den Kreisevolventen beibehalten. Denn läßt man auch negative Wälzungswinkel zu, so hat die gewöhnliche Evolvente in $z = 1$ eine Spitze, die verlängerte macht um den Punkt $z = 1$ eine Schleife, während die verkürzte Kurve die $x$-Achse außerhalb des Kreises senkrecht schneidet. Wie diese Kurven in der Literatur bezeichnet werden, ist mir nicht bekannt.

Für alle endlichen $t$ bleibt $\frac{dz}{dt}$ endlich. Strebt $t$ in Richtung der positiven bzw. negativen Achse des Imaginären ins Unendliche, so streben $\frac{dz}{dt}$ und $z$ beide gegen Null bzw. gegen unendlich. Also besteht auch im Nullpunkt der $z$-Ebene sowie in ihrem unendlich fernen Punkt keine Konformität.

Die Ausnahmestelle $z = e^k$ fällt bei der gewöhnlichen Kreisevolvente in ihren Ausgangspunkt $z = 1$, bei den verkürzten Kurven liegt sie rechts von den zugehörigen Ausgangspunkten, da $1 + k$ für positive $k$ kleiner als $e^k$ ist. Bei den verlängerten Evolventen liegt sie ebenfalls rechts von ihren Ausgangspunkten, da für negative $k$ $|k| > |1 - e^k|$ ist, andererseits ist sie hier immer zwischen 0 und 1 gelegen.

Der entsprechende Wert $t = -ik$ liegt für positive $k$ auf der negativen, für negative $k$ auf der positiven Achse des Imaginären.

Es handelt sich nun darum, mittels der Charakteristik Gebiete festzulegen, die durch die Funktion (19) konform aufeinander abgebildet werden.

Für positive reelle Werte von $t$ liegt $z$ auf der Evolvente. Der Kontur der Kurve entspricht also in der $t$-Ebene die positive Achse des Reellen. Das Bild der positiven Achse des Imaginären der $t$-Ebene ist in der $z$-Ebene bei der gewöhnlichen und bei den verkürzten Evolventen die Strecke von $1 + k$ bis 0, denn für $t = 0$ wird $z = 1 + k$, für $t = \lim_{\sigma = +\infty} i\sigma$ wird $z = \lim_{\sigma = +\infty} \frac{1 + k + \sigma}{e^\sigma} = 0$. Die Ableitung $\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1 + k + \sigma}{e^\sigma}\right) = \frac{-k - \sigma}{e^\sigma}$ ist für alle $\sigma > 0$ und alle $k \geqq 0$ negativ. D. h. $z$ fällt monoton von $1 + k$ bis 0, wenn $\sigma$ von 0 bis $\infty$ wächst.

Im Hinblick auf die verlängerten Evolventen entspricht dem Stück von $t = 0$ bis $t = -ik$[1]) in der $z$-Ebene die Strecke von $z = 1 + k$ bis $z = e^k$. Dem Rest der positiven $\sigma$-Achse von $\sigma = -k$ bis $\sigma = +\infty$ entspricht die Strecke von $z = e^k$ bis $z = 0$. Denn die Ableitung $\frac{-k - \sigma}{e^\sigma}$ ist gleich Null für $\sigma = -k$, für kleinere $\sigma$ ist sie positiv, für größere negativ, da $k$ hier negative Bedeutung hat. Bei den verlängerten Evolventen bekommen wir wieder einen Schnitt von $z = 1 + k$ bis $z = e^k$, in Analogie zu den in den Figuren 3, 16 und 29 angebrachten Schnitten.

---

[1]) Der Punkt $t = -ik$ liegt hier auf der positiven Achse des Imaginären.

Einzelne Sektoren, wie in den früheren Kapiteln, lassen sich hier nicht abgrenzen, da den Parallelen zur Achse des Imaginären der $t$-Ebene in der $z$-Ebene keine Geraden entsprechen. Die einzige Gerade, die wir in der $z$-Ebene zur Begrenzung mit heranziehen können, ist das oben angegebene Stück der Achse des Reellen. Im übrigen können wir ein Gebiet nur unter Zuhilfenahme der orthogonalen Trajektorien vollständig abgrenzen. Wir stellen deshalb die Betrachtung des Abbildungscharakters voran.

Wir betrachten zunächst die Parallelen zur positiven Achse des Reellen der $t$-Ebene. Wir setzen also in Gleichung (19) $t = \tau + i\sigma$ ein, wo $\sigma > 0$ als ein fester Wert und $\tau$ als variabel von 0 bis $+\infty$ angenommen ist. Dann erhalten wir

$$z = e^{-\sigma}\ \{[1 + (k + \sigma) - i\tau]\ e^{i\tau}\}.$$

Das ist aber wieder eine Evolvente, über deren Typus der Wert $k + \sigma$ entscheidet. Der Faktor $e^{-\sigma}$ bewirkt eine Verkleinerung, da $\sigma$ auf positive Werte beschränkt war. Der zu dieser Evolvente gehörende feste Kreis hat den Radius $e^{-\sigma}$. Die durch die geschweifte Klammer gekennzeichnete Evolvente hätte als Ausnahmestelle den Wert $e^{(k+\sigma)}$, zufolge des Faktors $e^{-\sigma}$ reduziert er sich auf $z = e^k$, d. i. aber die Ausnahmestelle der zugrunde gelegten Evolvente. Da wir $k$ beliebig festlegen können, können wir nun auch die Werte $\sigma < 0$ gelten lassen. Dem negativen Teil der $\sigma$-Achse vom Punkte $\sigma = -k$ beginnend, entspricht in der $z$-Ebene die negative Achse des Reellen von dem Ausnahmepunkt $z = e^k$ beginnend. Denn für $\sigma = -k$ ist $z = e^k$ für

$$t = \lim_{\sigma = -\infty} + i\sigma \text{ wird } z = \lim_{\sigma = -\infty} (1 + k + \sigma)\, e^{-\sigma} = -\infty;$$

der Differentialquotient $\dfrac{d}{d\sigma}(1 + k + \sigma)\, e^{-\sigma} = -(k + \sigma)e^{-\sigma}$ ist für alle $\sigma < -k$ positiv, also fällt $z$ monoton von $e^k$ bis $-\infty$, wenn $\sigma$ von $-k$ bis $-\infty$ abnimmt.

Legen wir, um unsere Betrachtungen zu vereinfachen, die gewöhnliche Evolvente zugrunde, so ist $k = 0$ und es ergibt sich folgender Sachverhalt: Dem positiven Teil der $\tau$-Achse entspricht die gewöhnliche Evolvente, einer Parallelen zu ihr auf der oberen Seite entspricht eine verkürzte, einer solchen auf der unteren Seite eine verlängerte Evolvente. Der Punkt $z = 1$ ist der einzige Ausnahmepunkt, in dem Winkelverdoppelung stattfindet. Der Nullpunkt wird ein Windungspunkt unendlich hoher Ordnung. Die verlängerten Kurven liegen außerhalb, die verkürzten innerhalb der gewöhnlichen Evolvente. Letztere legen sich immer enger um den Nullpunkt herum, je größer $\sigma$ wird. Der Radius, der zu diesen Kurven ge-

hörenden festen Kreise ist $e^{-\sigma}$, er strebt also mit wachsendem $\sigma$ gegen Null hin, während er mit abnehmendem $\sigma$ gegen unendlich konvergiert.

Um nun festzustellen, welcher Gestalt die Kurve ist, die in der $z$-Ebene das Bild einer Parallelen zur $\sigma$-Achse darstellt, wählen wir beispielsweise die Gerade $\tau = 2\pi$. Dem Punkte $t = 2\pi$ entspricht der Wert $z = 1 - 2\pi i$, für $t = \lim\limits_{\sigma = +\infty} (2\pi + i\sigma)$ wird

$$z = \lim_{\sigma = +\infty} \left( \frac{1 + \sigma - i\,2\pi}{e^{\sigma}} \right) = 0. \quad \text{Für } t = \lim_{\sigma = -\infty} (2\pi + i\sigma) \text{ wird}$$

$$z = \lim_{\sigma = -\infty} \left( \frac{1 + \sigma}{e^{\sigma}} \right) + i \lim_{\sigma = -\infty} \frac{-2\pi}{e^{\sigma}}.$$

Setzt man $z = x + iy$, so wird hier also

$$x = \lim_{\sigma = -\infty} \frac{1 + \sigma}{e^{\sigma}} = -\infty \text{ und } y = \lim_{\sigma = -\infty} \frac{-2\pi}{e^{\sigma}} = -\infty.$$

Betrachten wir auf der Geraden $\tau = 2\pi$ einen beliebigen aber festen Wert $t = 2\pi + i\sigma_0$, so entspricht diesem in der $z$-Ebene der Wert

$$z = \frac{1 + \sigma_0}{e^{\sigma_0}} - i\frac{2\pi}{e^{\sigma_0}}.$$

Dies stimmt mit der oben durchgeführten Überlegung überein. Denn der Radius des zur Evolvente $z = e^{-\sigma_0}\{[1 + \sigma_0 - i\tau]e^{i\tau}\}$ gehörigen Kreises ist $e^{-\sigma_0}$, der für die Gestalt der Kurve typische Wert ist $\sigma_0$, der seinerseits auch mit dem Faktor $e^{-\sigma_0}$ zu multiplizieren ist, um den Ausgangspunkt der Kurve zu ergeben. Letzterer hat also den Wert

$$e^{-\sigma_0} + \sigma_0 \cdot e^{-\sigma_0} = \frac{1 + \sigma_0}{e^{\sigma_0}}.$$

Nach einer vollen Umdrehung ist die Kurve in einen Punkt gelangt, der genau senkrecht unterhalb des Ausgangspunktes liegt, und zwar um den Wert $2\pi \cdot e^{-\sigma_0}$. Demnach ist der Wert des in Frage stehenden Punktes der Kurve

$$z = \frac{1 + \sigma_0}{e^{\sigma_0}} - i\frac{2\pi}{e^{\sigma_0}}.$$

Unter Zuhilfenahme der Exponentialkurve, die als gegeben angenommen werden soll, läßt sich für unsere Kurve folgende Punktkonstruktion angeben. Die Exponentialkurve sei in der Ebene $E$ gegeben, deren Abszissenachse also die $\sigma$-Achse und deren Ordinatenachse dann die $e_\sigma$-Achse ist[1]).

Wir suchen in der Ebene $E$ den Punkt $-\sigma_0$ auf. Die zugehörige Ordinate der Exponentialkurve gibt den Wert von $e^{-\sigma_0}$ an.

[1]) Wir nehmen für die $z$- und $t$-Ebene als auch für die Ebene $E$ die gleiche Einheit an.

Diese Strecke tragen wir in der $z$-Ebene auf der positiven Achse des Reellen von 0 aus auf und ziehen durch den Endpunkt eine Parallele zur Achse des Imaginären, welche die Gerade, die den Nullpunkt mit dem Punkte $1—2\pi i$ verbindet, in $A$ schneiden möge (Fig. 37). Konstruiert man den Wert $\sigma_0 \cdot e^{-\sigma_0}$ als vierte Proportionale zu 1, $\sigma_0$ und $e^{-\sigma_0}$, den man auf einer durch $A$ gezogenen Parallelen zur Achse des Reellen von $A$ aus nach rechts oder links, je nach dem Vorzeichen bis $P$ abträgt, so ist $P$ der gesuchte Punkt unserer Kurve. Denn $P$ hat nach Konstruktion die Koordinaten

$$\left.\begin{aligned} x &= e^{-\sigma_0}(1+\sigma_0) \\ y &= -2\pi e^{-\sigma_0} \end{aligned}\right\}.$$

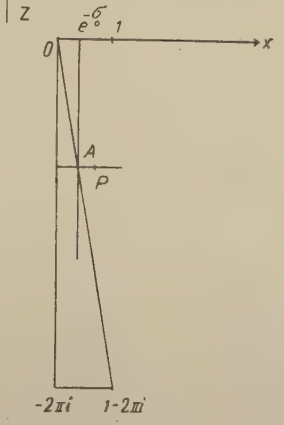


Fig. 37.

Durch dies Gleichungspaar ist gleichzeitig eine Parameterdarstellung der speziellen gesuchten Kurve gegeben.

Wir wollen die Richtung der Kurve bestimmen. Dazu bilden wir die Ableitung $\frac{dy}{dx}$. Es ist $\frac{dy}{d\sigma} = 2\pi e^{-\sigma}$, $\frac{dx}{d\sigma} = -e^{-\sigma} \cdot \sigma$, also wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\pi}{\sigma}.$$

Da $\sigma$ für $z = 0$ unendlich ist, so fällt die Richtung der Kurve im Nullpunkt mit der der positiven Achse des Reellen zusammen. Für $z = 1 - 2\pi i$ ist $\sigma = 0$, also $\frac{dy}{dx} = \infty$, d. h. die Richtung der Kurve ist im Punkte $z = 1 - 2\pi i$ parallel zur Achse des Imaginären. Für $\sigma = 2\pi$ wird $\frac{dy}{dx} = -1$. Die hierdurch bestimmte Richtung von $-45^0$ zur Achse des Reellen nimmt die Kurve an im Punkte

$$z = e^{-2\pi}(1 + 2\pi) + i\,2\pi \cdot e^{-2\pi} = 0{,}0136\ldots + i\,0{,}0118\ldots$$

In der Nähe des Nullpunktes hat die Kurve also eine starke Krümmung. Der Krümmungsradius $\varrho = \frac{1}{2\pi} e^{-\sigma}(\sigma^2 + 4\pi^2)^{\frac{3}{2}}$ ist Null für $\sigma = +\infty$, was der Stelle $z = 0$ entspricht.

Im Hinblick auf die allgemeine Gleichung wird der entsprechende Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = \frac{-2\pi}{k+\sigma}$, der für $\sigma = -k$ unendlich wird. Für diesen Wert von $\sigma$ ist $x = e^k$ und $y = -2\pi e^k$. Also nimmt die Kurve die Richtung der Achse des Imaginären an in dem Punkte

$$z = e^k - i\,2\pi e^k.$$

In ganz analoger Weise lassen sich alle übrigen Kurven angeben, die den Parallelen zur $\sigma$-Achse in der $z$-Ebene entsprechen.

Diese Kurven sind die orthogonalen Trajektorien zu den Evolventen, die den Parallelen zur $\tau$-Achse in der $z$-Ebene entsprechen. Allgemein lassen sich diese Trajektorien aus Gleichung (19) angeben. Setzt man $t = \tau + i\sigma$, so wird

$$z = (1 + k - i\tau + \sigma)\, e^{i\tau} \cdot e^{-\sigma} = e^{-\sigma}(1 + k + \sigma - i\tau)(\cos\tau + i\sin\tau).$$

Durch Trennung der reellen und imaginären Bestandteile wird:

$$\left\{\begin{array}{l} x = e^{-\sigma}[(1 + k + \sigma)\cos\tau + \tau\cdot\sin\tau] \\ y = e^{-\sigma}[(1 + k + \sigma)\sin\tau - \tau\cdot\cos\tau] \end{array}\right\}.$$

Für konstantes $\sigma$ ergeben diese Gleichungen Kreisevolventen, für konstantes $\tau$ dagegen die zu diesen orthogonalen Trajektorien. Sie sind transzendente Kurven.

Ist im besonderen $\tau = 2\pi$, so wird hieraus:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1 + k + \sigma}{e^{\sigma}} \\ y = \dfrac{-2\pi}{e^{\sigma}} \end{array}\right\}$$

in Übereinstimmung mit der oben angegebenen Parameterdarstellung der speziellen Kurve, für die $k = 0$ war.

Den ins Positiv-imaginäre verlaufenden Parallelhalbstreifen von der Breite $2\pi$ können wir durch die Substitution $w = e^{it}$ auf den von 1 bis 0 aufgeschlitzten Einheitskreis konform abbilden.

Dann wird $it = \ln w$ und wir erhalten die Funktion:

(20) . . . . . $\boldsymbol{z = (1 + k - \ln w)\, w}$.

Der Differentialquotient

$$\frac{dz}{dw} = k - \ln w$$

hat die Nullstelle

$$w = e^{k},$$

der in der $z$-Ebene als Ausnahmestelle der Funktion (20) der Wert

$$z = e^{k}$$

entspricht. In diesem Punkte besteht Winkelverdoppelung, da

$$\frac{d^2z}{dw^2} = -\frac{1}{w}$$

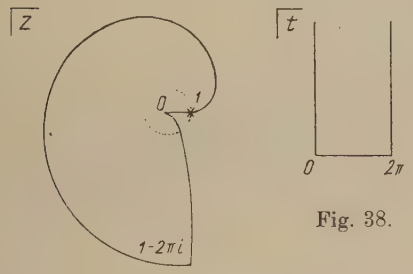
für $w = e^{k}$ von Null verschieden ist.

Für $w = 0$ wird $\dfrac{dz}{dw}$ unendlich und $z = \lim\limits_{w=0}(1 + k - \ln w)\, w = -\lim\limits_{w=0}(\ln w \cdot w) = 0$[1]. Im Nullpunkt besteht also keine Konformität.

[1]) $\lim\limits_{w=0}(w\cdot\ln w) = \lim\limits_{w=0}\dfrac{\ln w}{w^{-1}} = \lim\limits_{w=0}\dfrac{w^{-1}}{-w^{-2}} = 0.$

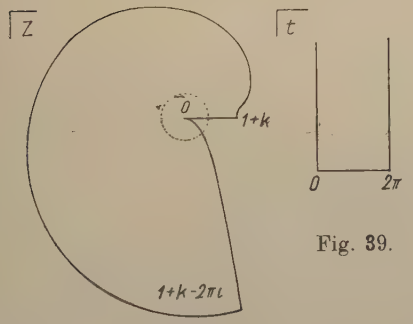
Für $w=1$ ist $\ln w = 2\pi i\nu$. Für $\nu=0$ wird dann $z=1+k$. Die Ableitung $\frac{dz}{dw}$ ist für alle $0<w<1$ positiv, solange $k \geqq 0$ ist. Folglich fällt $z$ monoton von $1+k$ bis 0, wenn $w$ von 1 bis 0 abnimmt. Ist $k<0$, handelt es sich also um eine verlängerte Evolvente, dann ist $\frac{dz}{dw}$ negativ für alle $1>w>e^k$, dagegen positiv für alle $e^k>w>0$. Also wächst $z$ monoton von $1+k$ bis $e^k$, wenn $w$ von 1 bis $e^k$ abnimmt. Nimmt $w$ weiter ab von $e^k$ bis 0, so fällt auch $z$ monoton von $e^k$ bis 0.

Ist $\nu=1$, so resultiert $\ln w = 2\pi i$ und es wird $z=1+k-2\pi i$. Wie dem oberen Ufer des Schlitzes im Einheitskreise in der $z$-Ebene die Strecke von $1+k$ bis 0 entsprach, so entspricht also dem unteren Ufer die Kurve, welche als das Bild der Geraden $\tau=2\pi$ ermittelt wurde. Wir erhalten somit die folgenden Abbildungen. (Wir setzen $|k|=q$.)



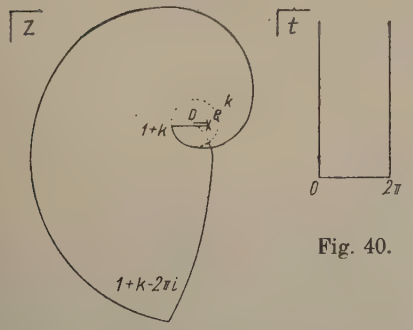

$z=(1-it)\,e^{it}$.
$z=(1-\ln w)\,w$.

Fig. 38.




$z=(1+q-it)\,e^{it}$.
$z=(1+q-\ln w)\,w$.

Fig. 39.




$z=(1-q-it)\,e^{it}$.
$z=(1-q-\ln w)\,w$.

Fig. 40.

Zur Veranschaulichung des Abbildungscharakters diene die folgende Figur.

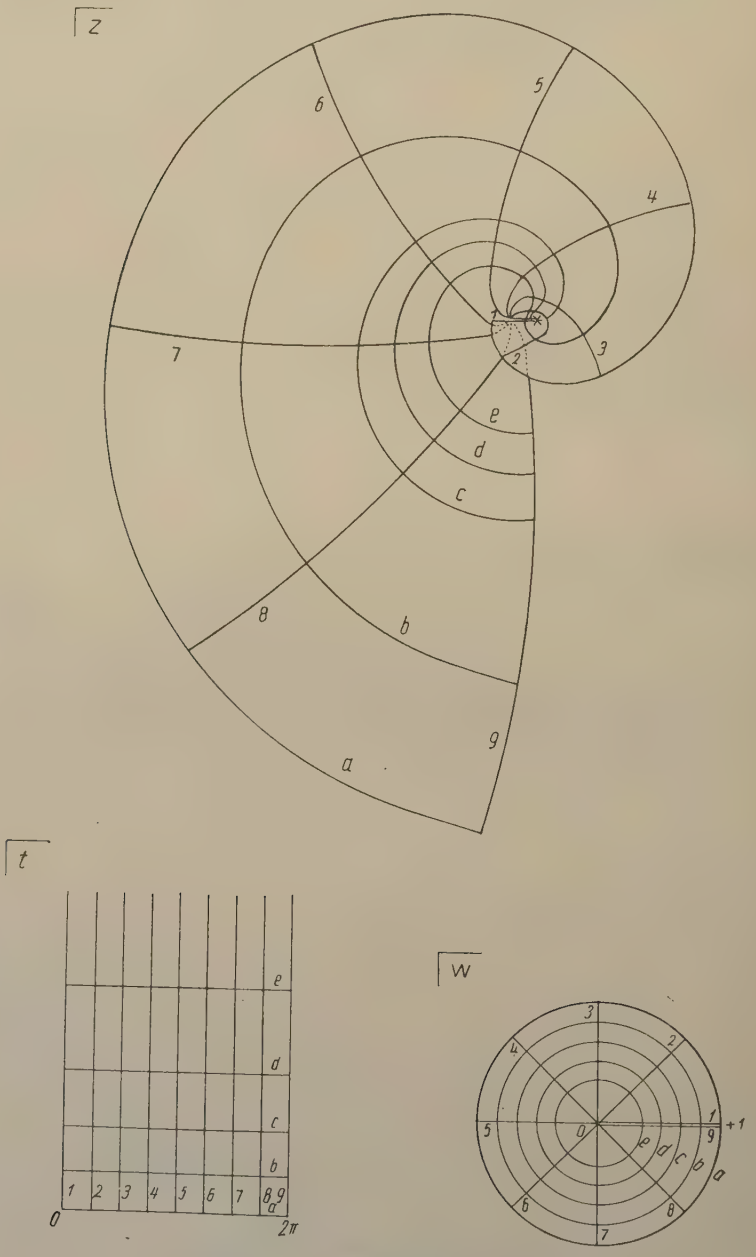



Fig. 41.

$$z = (1 + k - it)\, e^{it}.$$
$$z = (1 + k - \ln w)\, w.$$

Hieraus lassen sich analog zu den vorangegangenen Kapiteln eine große Anzahl von Teilabbildungen entnehmen, die wir jedoch nicht weiter hervorheben wollen.

Betrachtet man die Evolventen in ihrer gesamten Ausdehnung, so müssen für den Wälzungswinkel alle positiven und negativen Werte zugelassen werden. Der Nullpunkt der $z$-Ebene ist dann ein Windungspunkt unendlich hoher Ordnung. Auf dem positiven Teil der Achse des Reellen liegt in endlicher Entfernung vom Nullpunkt ein Windungspunkt erster Ordnung. Die hierdurch charakterisierte Riemannsche Fläche wird durch die Funktion (19) auf die schlichte $t$-Ebene eineindeutig konform abgebildet. Den Parallelen zur $\tau$-Achse entsprechen Kreisevolventen, deren orthogonale Trajektorien die Bilder der Parallelen zur $\sigma$-Achse sind.

## V. Analytische Spiegelung an den Rollkurven und daraus sich ergebende Unmöglichkeitsbeweise.

Es kommt uns darauf an, den Nachweis zu erbringen, daß die Gebiete, die sich nach dem in dieser Arbeit durchweg angewandten Verfahren nicht mit behandeln ließen, überhaupt nicht durch eindeutige in der ganzen Ebene meromorphe Funktionen auf das Innere des Einheitskreises abgebildet werden können, wie es bei den betrachteten Abbildungen überall der Fall war.

Es handelt sich hier vor allem um das Innere der Hypozykloiden, das Äußere der Epizykloiden und um die oberhalb einer Zykloide gelegene Halbebene.[1])

Sofern es sich um die gewöhnlichen Kurven handelt, ist ein einfacher Schluß möglich. In den Spitzen der Kurven, die zur Umrandung des abzubildenden Gebietes gehören, tritt der Winkel Null auf, während der Winkel auf der Peripherie des Einheitskreises, die zufolge der Abbildungsfunktion der Kontur der zyklischen Kurve entspricht, durchweg den Wert $\pi$ besitzt. Es findet also in gewissen Punkten der Berandung eine unendliche Vervielfachung der Winkel statt. Daher kann die Abbildungsfunktion nicht meromorph sein.

Dieser Schluß kann bei den übrigen Kurvenarten nicht angewandt werden. Hier führt ein anderer Weg zum Ziel.

Wir wollen den Unmöglichkeitsbeweis aus der analytischen Spiegelung an den zyklischen Kurven herleiten. Hierzu müssen wir diese selbst erst eingehender betrachten. Die topologische Natur dieser Spiegelung ergibt sich leicht aus den bisherigen Resultaten dieser Arbeit. Wir werden dann zeigen, daß im Falle der Existenz meromorpher Funktionen für die genannten Abbildungen sich eine zweite Art der Spiegelung an den zyklischen Kurven ergeben müßte, was mit dem Unitätssatz der analytischen Spiegelung im Widerspruch steht.

Wir führen die Betrachtungen an dem Beispiel der verkürzten Hypozykloide durch. Für die anderen Kurven ergeben sich völlig analoge Schlüsse, wie sie hierbei angewendet werden.

[1]) Bei den Kreisevolventen lassen sich analoge Gebiete ebenfalls angeben, sie besitzen jedoch kein weiteres Interesse.

Wir sahen oben, daß dem unendlichen Sektor $(U_1)$ (s. Fig. 42), der durch die Halbstrahlen $S_0$ und $S_1$ sowie von einem Bogen $(l_1)$ der Hypozykloide begrenzt war, zufolge der Funktion (1) in der $t$-Ebene ein ins Negativ-imaginäre verlaufender Halbstreifen $(H)$ entsprach. Das Spiegelbild $(\overline{H})$ von diesem bezüglich der Achse des Reellen war das Bild des Äußeren $(\overline{U}_1)$ des genannten Sektors, wie es in der Fig. 10 im ersten Kapitel dargestellt ist. Die längs der Halbstrahlen von den Punkten $A_0$ und $A_1$ bis zu den Ausnahmepunkten $B_0$ und $B_1$ führenden Schnitte sind zur Berandung von $\overline{U}_1$ mit hinzuzuzählen. Zufolge des Schwarzschen Spiegelungsprinzipes ist $\overline{U}_1$ das Spiegelbild von $U_1$ in bezug auf den Hypozykloidenbogen $l_1$.

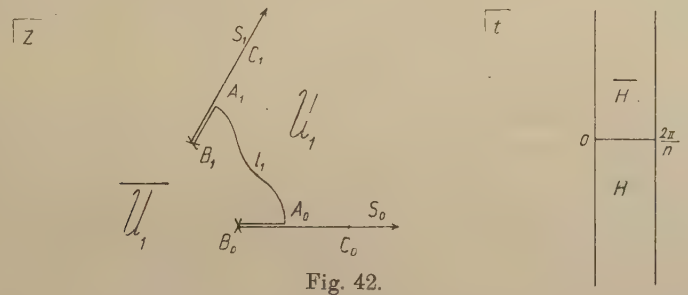



Fig. 42.

Wir haben also durch den Bogen $l_1$ und die Halbstrahlen $S_0$ und $S_1$ einschließlich der Schnitte eine Einteilung der Ebene in zwei Gebiete, die sich bezüglich der analytischen Linie $l_1$ spiegelbildlich eineindeutig entsprechen. Der Abbildungscharakter an den Ausnahmestellen $B_0$ und $B_1$ liefert einen selbständigen Beweis des Windungscharakters in diesen Punkten. Den Punkten $B_0$ und $B_1$ müssen bestimmte Punkte $C_0$ und $C_1$ auf den Halbstrahlen $S_0$ und $S_1$ als Uferpunkte von $U_1$ spiegelbildlich entsprechen. Das Spiegelbild des Weges von $A_0$ auf $S_0$ bis ins Unendliche als Randstück von $U_1$ ist der Weg von $A_0$ nach $B_0$ und von dort zurück entlang des Halbstrahles $S_0$ ebenfalls bis ins Unendliche als Randstück von $\overline{U}_1$. Beschreibt man innerhalb $\overline{U}_1$ um $B_0$ eine Schleife $\sigma$, so entspricht dieser als Spiegelbild bezüglich $l_1$ eine Halbschleife $\overline{\sigma}$ um $C_0$, die ganz im Innern von $U_1$ liegt.

Fig. 43.

Die analytische Fortsetzung der Spiegelungstransformation ergibt sich aus dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip in der Weise, daß dem doppelten Umlauf um $B_0$ ein einfacher Umlauf um $C_0$ entspricht.

Die Punkte $B_0$ und $B_1$ sind daher für die Spiegelungstransformation Verzweigungspunkte erster Ordnung. Die Spiegelung an einem einzelnen Hypozykloidenbogen weist also zwei Verzweigungspunkte erster Ordnung auf. Das ist ein Charakteristikum der Spiegelung an dieser speziellen analytischen Linie. Denn die Spiegelung an einer analytischen Linie hängt nur von der Gestalt dieser Linie selbst, nicht aber von der zur Parameterdarstellung der Kurve benutzten Hilfsveränderlichen ab.

Wir betrachten nun wieder die ganze Hypozykloide. Die von $A_0$ und $A_1$ nach $B_0$ und $B_1$ führenden Schnitte zählen mit zur Berandung. Das so verstandene innere Gebiet dieser Kurve wollen wir mit $J_1$ bezeichnen. Da $J_1$ vollständig innerhalb $U_1$ liegt, muß $\bar{J}_1$, das Spiegelbild von $J_1$ bezüglich $l_1$, ganz in das Innere von $U_1$ fallen und zwar muß auch $\bar{J}_1$ ein endlicher Bereich sein. Denn man kann einen in den Rahmen des Abbildungscharakters passenden verlängerten Hypozykloidenbogen $(h)$ angeben, der $J_1$ in $\bar{U}_1$ völlig umschließt. Sein Spiegelbild an $l_1$ ist ein Bogen $(\bar{h})$ einer verkürzten Hypozykloide, der also für $\bar{J}_1$ eine endliche Schranke liefert.

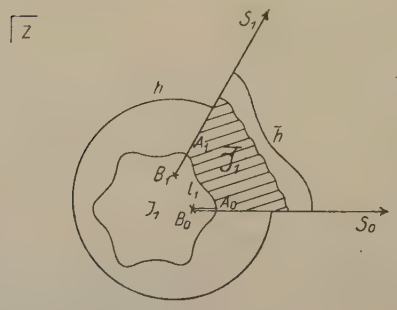



Fig. 44.

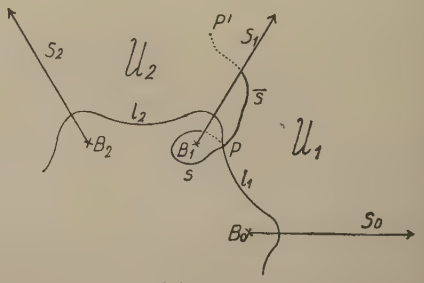



Fig. 45.

In ganz derselben Art ist die Natur der Spiegelung an den anderen Bogen der vorliegenden Hypozykloide beschaffen. Ist $U_2$ (s. Fig. 45) der zwischen $S_1$ und $S_2$ und dem zu $l_1$ benachbarten Kurvenbogen $l_2$ gelegene unendliche Sektor, so ist $U_2$, sein Spiegelbild bezüglich $l_2$, ein zu $\bar{U}_1$ völlig analoges Gebiet, in dessen Begrenzungspunkten $B_1$ und $B_2$ die Spiegelungsfunktion wieder verzweigt ist. $U_2$ und $\bar{U}_2$ ergeben das zweite Blatt der im Kapitel I besprochenen Riemannschen Fläche. Dieses hängt mit dem ersten Blatt längs des Halbstrahles $S_1$ von $B_1$ an zusammen.

Zieht man nun von einem beliebigen Punkt $P$ des Bogens $l_1$ aus um $B_1$ eine Schleife $(s)$ in der Weise, wie in der folgenden Figur angegeben, so kann ihr Spiegelbild $(\bar{s})$ an $l_1$ nicht in den Punkt $P$ zurückkehren. $\bar{s}$ wird vielmehr den Halbstrahl $S_1$ überschreiten und in den Bereich $U_2$ eintreten. $\bar{s}$ endet dann in dem Punkte $(P')$, der das Spiegelbild von $P$ bezüglich des Bogens $l_2$ ist.

Die topologische Natur der analylitischen Spiegelung an den übrigen zyklischen Kurven läßt sich in genau derselben Art präzisieren. In allen Fällen werden die Ausnahmestellen der Abbildung für die Spiegelungstransformation Verzweigungspunkte erster Ordnung.

Hieraus leiten wir nun den oben genannten Unmöglichkeitsbeweis her. Wir führen ihn wieder im Hinblick auf die verkürzte Hypozykloide durch.

Zufolge des allgemeinen Riemannschen Abbildungssatzes muß es eine Funktion $z = \varphi(w)$ geben, welche das Innere dieser Hypozykloide auf das Innere des Einheitskreises konform abbildet. Diese Funktion muß nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip auch über die Begrenzung hinaus wenigstens ein gewisses Stück regulär analytisch fortsetzbar sein nach der Theorie der Ränderzuordnung bei konformer Abbildung.[1])

Zu einem Punkte $z_1$ im Inneren der Hypozykloide würde man den bezüglich $l_1$ spiegelbildlich gelegenen Punkt $\bar{z}_1$ auf folgende Art finden können. Man ermittelt zunächst den Punkt $w_1$, der zufolge der Abbildungsfunktion dem Punkte $z_1$ entspricht. Ist nun $z = \varphi(w)$ im speziellen eine rationale oder allgemeiner eine meromorphe Funktion, so kann sie über den Einheitskreis hinaus bis ins Unendliche eindeutig analytisch fortgesetzt werden. Die Inversion liefert den Punkt $\bar{w}_1$, der zu $w_1$ in bezug auf den Einheitskreis spiegelbildlich gelegen ist. Die Funktion $z = \varphi(w)$ vermittelt uns dann den Punkt $\bar{z}_1$, der dem Punkte $\bar{w}_1$ in der $z$-Ebene entspricht. Auf diese Art wird also jedem inneren Punkte $z_\lambda$ der Hypozykloide ein- und nur ein Punkt $\bar{z}_\lambda$ zugeordnet, der zufolge des Schwarzschen Spiegelungsprinzipes das Spiegelbild von $z_\lambda$ bezüglich des Kurvenbogens $l_1$ sein muß. Beschreibt man also im Innern der Kurve eine beliebige Bahn, beispielsweise wieder die Schleife $s$ von $P$ aus um den Punkt $B_1$, so muß ihr an $l_1$ gewonnenes Spiegelbild $(s')$, das ebenfalls in $P$ beginnt, auch in diesen selben Punkt wieder zurückkehren. Dadurch aber wäre eine zweite Art der Spiegelung an ein und derselben

[1]) Vgl. auch die neuere Begründung bei P. Koebe, Abhandl. zur Theorie der konformen Abbildung I. Journal für Mathematik Band 145. § 9 der Abhandlung.

analytischen Linie erklärt im Gegensatz zu dem Unitätssatz der analytischen Spiegelung. Die Abbildungsfunktion $\varphi(w)$ kann daher nicht meromorph sein. Im besonderen ist sie also weder eine rationale Funktion, noch eine rationale Funktion der Exponentialfunktion, ferner nicht eine rationale Funktion von $w$ und der Exponentialfunktion, noch auch eine elliptische Funktion, d. i. eine rationale Funktion von $\wp(w)$ und $\wp'(w)$.

Ein zweiter Unmöglichkeitsbeweis, aus dem sogar hervorgehen wird, daß die gedachte Abbildungsfunktion $\varphi(w)$ ihrer analytischen Gesamtausdehnung nach überhaupt nicht eindeutig sein kann, ergibt sich folgendermaßen. Wir betrachten den inneren Bereich $G$ der Hypozykloide, zu dessen Berandung wir hier sämtliche von $A_\gamma$ nach $B_\gamma$ ($\gamma = 0, 1, \ldots n-1$) führende Schnitte mit hinzuzählen. Spiegelt man $G$ an den einzelnen Kurvenbogen $l_k$ ($k = 1, 2, \ldots n$), so erhält man $n$ untereinander kongruente Gebiete $\overline{G}_k$, die je ganz im Innern der einzelnen Sektoren $U_k$ liegen und ihrerseits nun je $(n-2)$ Schnitte aufweisen müssen, welche die Spiegelbilder der außerhalb des jeweilig in Frage stehenden Sektors gelegenen Schnitte von $G$ sind. (Diese in den Bereichen $\overline{G}_k$ gelegenen Schnitte sind natürlich nicht gradlinig.)

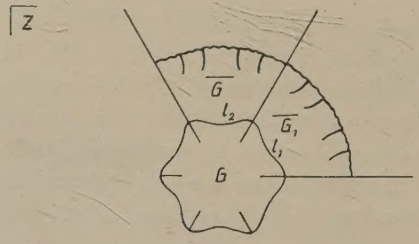



Fig. 46.

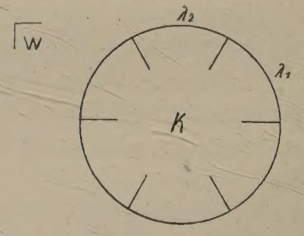



Fig. 47.

Leistet nun die als eindeutig angenommene Funktion $z = \varphi(w)$ die Abbildung des Inneren des Einheitskreises auf das ungeschlitzte Innere der Hypozykloide, so werden den Schnitten von $A_\gamma$ nach $B_\gamma$ auch in der $w$-Ebene gewisse Schnitte entsprechen, die übrigens aus Symmetriegründen gradlinig verlaufen müssen, sofern dem Mittelpunkt von $G$ der Mittelpunkt des Kreises entspricht. Zählt man diese Schnitte dann in der $w$-Ebene mit zur Berandung hinzu, so ist das so verstandene Innere ($K$) des Kreises zufolge der Funktion $z = \varphi(w)$ das Bild von $G$. Wir bezeichnen die einzelnen zwischen den Schnitten gelegenen Bogen des Kreises mit $\lambda_k$.

Spiegelt man nun den Bereich $K$ an einem der Bogen $\lambda_k$, so erhält man als Spiegelbild jedesmal das ganze Äußere des Einheits-

kreises, das an dem Bogen $\lambda_k$ angeheftet zu denken ist. Den verschiedenen Gebieten $\overline{G}_k$ entsprechen dann in der $w$-Ebene Gebiete, die in den verschiedenen Blättern einer Riemannschen Fläche gelegen sind. Betrachtet man aber die $w$-Ebene als schlicht, so entsprechen dem Äußeren des Einheitskreises in der $z$-Ebene jedesmal mindestens die $n$ Gebiete $\overline{G}_k$. Durch diesen zweiten Beweis wird also gezeigt, daß die Funktion $\varphi(w)$ überhaupt keine eindeutige Funktion sein kann.

## Zusammenstellung der Abbildungsfunktionen.


Seite

(1) . . . . . $z = (n-1)\,e^{ti} + q\,e^{-(n-1)ti}$ . . . . . 4

(2) . . . . . $z = \dfrac{n-1}{w} + q\,w^{n-1}$ . . . . . 9

(3) . . . . . $z = (n-1)\,w' + q\,\dfrac{1}{w'^{(n-1)}}$ . . . . . 13

(4) . . . . . $z = \sqrt[n]{\dfrac{1}{W}}\,(n-1+qW)$ . . . . . 13

(5) . . . . . $z = \sqrt[n]{w''}\left(n-1+q\,\dfrac{1}{w''}\right)$ . . . . . 19

(6) . . . . . $z = \sqrt[2n]{\dfrac{1}{w'''}}\left(n-1+q\,\dfrac{1}{\sqrt{w'''}}\right)$ . . . . . 20

(7) . . . . . $z = \left(\dfrac{\mu}{\nu}-1\right)e^{ti} + q\,e^{-\left(\frac{\mu}{\nu}-1\right)ti}$ . . . . . 22

(8) . . . . . $z = (n+1)\,e^{ti} - q\,e^{(n+1)ti}$ . . . . . 24

(9) . . . . . $z = (n+1)\,w - q\,w^{n+1}$ . . . . . 29

(10) . . . . . $z = \sqrt[n]{W}\,(n+1-qW)$ . . . . . 31

(11) . . . . . $z = \sqrt[n]{\dfrac{1}{w'}}\left(n+1-q\,\dfrac{1}{w'}\right)$ . . . . . 37

(12) . . . . . $z = \sqrt[2n]{\dfrac{1}{w''}}\left(n+1-q\,\dfrac{1}{\sqrt{w''}}\right)$ . . . . . 37

(13) . . . . . $z = \left(\dfrac{\mu}{\nu}+1\right)e^{ti} - q\,e^{\left(\frac{\mu}{\nu}+1\right)ti}$ . . . . . 39

(14) . . . . . $z = t + i\,(1 - q\,e^{-it})$ . . . . . 41

(15) . . . . . $z = i\,(1 + n\ln w - q\,w^n)$ . . . . . 46

(16) . . . . . $z = i\,(1 + \ln W - qW)$ . . . . . 47

(17) . . . . . $z = i\left(1 - \ln w' - q\,\dfrac{1}{w'}\right)$ . . . . . 50

(18) . . . . . $z = i\left(1 - \dfrac{1}{2}\ln w'' - q\sqrt{\dfrac{1}{w''}}\right)$ . . . . . 51

(19) . . . . . $z = (1+k-it)\,e^{it}$ . . . . . 53

(20) . . . . . $z = (1+k-\ln w)\,w$ . . . . . 58

# Lebenslauf.

Geboren wurde ich, Johannes Emil Andreas Philipps, am 28. Mai 1891 in Berlin als Sohn des Pastors D. Wilhelm Philipps. Ich bin evangelisch und preußischer Staatsangehöriger. Ich habe das humanistische Gymnasium besucht und am 22. März 1911 in Spandau die Reifeprüfung bestanden. Ich widmete mich dann dem Studium der Mathematik, Physik und Chemie. Im S.S. 1911 war ich in Bonn, darauf zwei Semester in Berlin und zwei weitere in Göttingen. Danach ging ich für ein Jahr nach England, wo ich u. a. für den Mai-Term 1914 in Cambridge immatrikuliert gewesen bin. Im S.S. 1915 ließ ich mich abermals in Berlin einschreiben, wurde jedoch zum Heeresdienst eingezogen. Im S.S. 1916 begann ich mein Studium von neuem in Jena, wo ich bis zum S.S. 1918 blieb. Im W.S. 1918/19 ging ich nach Marburg, wo ich am 9. April 1919 die mündliche Doktorprüfung bestand.